П. С. МОДЕНОВ и А. С. ПАРХОМЕНКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1961

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского Совета
Московского университета

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга предназначена для работы студентов в семинарах по геометрии в университетах и педагогических институтах.

Книга может быть использована в качестве учебного пособия учителями математики средней школы для повышения квалификации.

Наконец, многие разделы книги могут служить материалом для работы в школьных математических кружках под руководством учителя.

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с преобразованиями, сохраняющими основные образы геометрии — прямые и окружности. Такими преобразованиями являются ортогональные, подобные, аффинные, проективные и круговые преобразования.

Характер изложения по преимуществу элементарно геометрический, однако в ряде вопросов используется метод координат (там, где синтетическое изложение представляется более громоздким). В очень умеренном объеме применяются сведения из векторной алгебры (необходимые пояснения даны в самой книге).

Для понимания ряда вопросов сообщаются элементарные сведения из проективной геометрии; кроме того, в дополнении в главе V (топология проективной плоскости) несколько подробнее изложен вопрос о строении проективной плоскости.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность проф. В. Г. Болтянскому, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний. При редактировании рукописи В. С. Капустиной были устранены многие недочеты в изложении, за что авторы считают нужным принести ей свою благодарность. Авторы отмечают также, что гла-

ва VI написана ими с использованием статьи о круговых преобразованиях студента II курса физического факультета В. В. Кучеренко, в частности, ему принадлежит изящное доказательство основной теоремы о представлении произвольного кругового преобразования плоскости в виде произведения инверсии на подобие, а также в виде произведения инверсии на поворот (или симметрию).

Москва, январь 1961 г.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

При изучении ряда вопросов геометрии — при доказательстве теорем, при решении задач на построение, при исследовании геометрических образов — в школьном курсе геометрии применяются различные преобразования: симметрия, вращение, перенос, подобие, инверсия и др.

Мы дадим общее определение понятия преобразования, а затем исследуем те из них, которые наиболее важны для элементарной геометрии: ортогональные преобразования, аффинные преобразования, проективные преобразования и инверсии.

Исследование указанных преобразований важно в двух отношениях.

1. Эти преобразования являются «простейшими» в том смысле, что при них сохраняются основные образы геометрии: отрезки и углы (при ортогональных преобразованиях), прямые линии (при аффинных и проективных преобразованиях), прямые и окружности (при инверсии).

2. Разделение геометрии на элементарную, аффинную, проективную и др. определяется тем, какие из геометрических свойств сохраняются при тех или иных преобразованиях и какие свойства этими преобразованиями нарушаются. Так, элементарная геометрия имеет дело с такими свойствами геометрических фигур, которые сохраняются при движении (и подобных преобразованиях); аффинная геометрия изучает те свойства геометрических фигур, которые сохраняются при аффинных преобразованиях*: прямолинейность, параллельность, отношение отрезков одной прямой и др.; при аффинных преобразованиях уже, вообще говоря, не сохраняются длины отрезков, величины углов и другие метрические свойства фи-

* Точные определения всех преобразований будут даны ниже.

гур. Проективная геометрия изучает свойства, сохраняющиеся при проективных преобразованиях. Таковыми являются, например, прямолинейность, двойное отношение четырех точек одной прямой (в частности, гармонизм) и др. При проективных преобразованиях меняются не только длины и углы, но даже параллельные прямые могут перейти в пересекающиеся.

Отметим, наконец, что часто исследование более общих преобразований может быть заменено изучением некоторого аффинного преобразования, достаточно хорошо аппроксимирующего данное преобразование. Так поступают в гидромеханике при изучении сложного течения жидкости, в теории упругости при изучении деформации твердых тел и т. п.

Мы в основном ограничимся изучением преобразований плоскости. Для пространства исследование протекает аналогично, и мы будем на нем останавливаться лишь постольку, поскольку оно имеет свои специфические особенности.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ

В математике имеются два понятия, которые позволяют наиболее отчетливо формулировать основные определения и теоремы. Это — понятия множества и функции. Сами эти понятия считаются в математике элементарными, т. е. им не дается прямых определений. Обычно они поясняются рассмотрением примеров, с чего и мы начнем наше изложение.

Так, окружность представляет собой множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки (центр окружности); все точки M, лежащие внутри треугольника ABC, объединяются в множество точек, характеризующихся следующим свойством: точки M и A лежат по одну сторону от прямой BC, точки M и B лежат по одну сторону от прямой CA, точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB.

Линии и поверхности в математике определяются как множества точек пространства, обладающих вполне определенными свойствами. Во всем дальнейшем на прямые и плоскости мы будем смотреть так же, как на множества точек, которые им принадлежат, хотя при построении элементарной геометрии эти понятия (точка, прямая, плоскость) не имеют прямых определений.

С понятием функции мы встречаемся на самых ранних этапах изучения математики: многочлен

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

дает нам простейший пример алгебраической функции. Примерами более сложных функций являются такие:

$$y = a^x, \quad y = \log_a x, \quad y = \sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x \text{ и т. д.}$$

При изучении функций всегда надо обращать внимание на два обстоятельства:

1) каково множество значений аргумента, для которых определена данная функция (область определения функции);

2) каково множество значений, принимаемых данной функцией.

Например: если ограничиваться лишь множеством действительных чисел, то для функции $y=x^2$ областью ее определения будет множество всех действительных чисел, а множеством ее значений — множество всех неотрицательных чисел.

Для функции $y=\lg x$ областью определения является множество всех положительных чисел, а множеством значений — множество всех действительных чисел.

Для функции $y=\lg \sin x$ областью определения является множество всех чисел, принадлежащих интервалам вида

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi,$$

где k — любое целое число. Множеством значений является совокупность всех неположительных чисел.

Для функции $y=\sqrt{\lg \sin x}$ область определения состоит из множества чисел

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где k — любое целое число, а множество значений состоит из одного числа 0.

Мы не будем здесь рассматривать общие свойства множеств и функций. Хорошее изложение этих вопросов можно найти, например, в книге П. С. Александрова «Введение в общую теорию множеств и функций» (Гостехиздат, 1947).

Приведенные выше примеры мы могли бы истолковать еще так: функция $y=x^2$ отображает множество всех точек прямой (оси абсцисс) на множество всех точек полупрямой (положительной части оси Ox): точке $M(x)$ ставится в соответствие точка $M'(x^2)$. Например, точке $M(3)$ соответствует точка $M'(9)$; точке $M'(9)$ соответствует точка $M'(81)$ и т. д.

Функция $y=\lg x$ отображает полупрямую ($x>0$) на всю прямую (ось абсцисс) и т. д.

Обобщением понятия функции в геометрии является понятие отображения и преобразования. Здесь областью определения и областью значений являются уже не множества чисел, а множества точек прямой, плоскости или пространства.

Например, при преобразовании гомотетии с центром в

точке O и коэффициентом $k>0$ каждой точке M плоскости ставится в соответствие точка M' луча OM такая, что

$$\frac{OM'}{OM} = k$$

(точке O ставится в соответствие сама эта точка). Здесь областью определения преобразования и множеством его значений является вся плоскость (рис. 1).

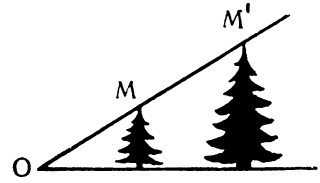


Рис. 1

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЯ

Мы начнем изложение теории геометрических преобразований с общих определений. Они носят несколько абстрактный характер, так как относятся к множествам, природа элементов которых для нас пока безразлична. Делается это для того, чтобы в этих определениях охватить случаи отображений и преобразований прямой, плоскости и пространства, а также множеств, составляющих часть этих геометрических образов. Кроме того, нам в дальнейшем придется применять понятие преобразования к геометрическим образам, не укладывающимся в рамки элементарной геометрии.

На первых же порах при знакомстве с приводимыми ниже общими определениями можно в качестве фигурирующих там множеств представлять себе прямую, плоскость или пространство, а в качестве отображений и преобразований — какие-нибудь хорошо известные преобразования из школьного курса геометрии (симметрия, поворот, подобие и т. д.). Рекомендуется сначала прочитать приводимые ниже определения, затем тщательно разобрать иллюстрирующие их примеры и после этого снова прочитать эти общие определения.

Определение. *Отображением* α *множества* $\mathfrak{M}$ *в множество* $\mathfrak{M}'$ *называется такое соответствие, при котором каждому элементу* M *множества* $\mathfrak{M}$ *соответствует вполне определенный элемент* M' *множества* $\mathfrak{M}'$.

Элемент M' называется *образом* элемента M, а элемент M называется *прообразом* элемента M' при отображении α. Если M' — образ M при отображении α, то будем писать

$$M' = \alpha(M).$$

Пусть A — некоторое подмножество множества $\mathfrak{M}$ и A' — совокупность элементов множества $\mathfrak{M}'$, являющихся образа-

ми элементов множества A; будем множество A' называть образом множества A.

Совокупность B всех элементов множества $\mathfrak{M}$, образами которых служат элементы множества B', являющегося подмножеством множества $\mathfrak{M}'$, называется *полным прообразом* множества B' при отображении α.

Если при отображении α *каждый* элемент M' множества $\mathfrak{M}'$ соответствует по крайней мере одному элементу M множества $\mathfrak{M}$, то говорят, что множество $\mathfrak{M}$ отображается на множество $\mathfrak{M}'$. Отображение множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{M}'$ называется *взаимнооднозначным*, если каждому элементу множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие один и только один элемент множества $\mathfrak{M}'$ и каждый элемент множества $\mathfrak{M}'$ поставлен в соответствие одному и только одному элементу множества $\mathfrak{M}$.

Таким образом, при взаимнооднозначном отображении множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{M}'$.

1) каждому элементу множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие некоторый элемент множества $\mathfrak{M}'$;

2) разным элементам множества $\mathfrak{M}$ ставятся в соответствие разные элементы множества $\mathfrak{M}'$;

3) каждый элемент множества $\mathfrak{M}'$ поставлен в соответствие некоторому элементу множества $\mathfrak{M}$.

Для каждого взаимнооднозначного отображения множества $\mathfrak{M}$ на множество $\mathfrak{M}'$ естественно определяется *обратное* отображение множества $\mathfrak{M}'$ на множество $\mathfrak{M}$, при котором каждому элементу M' множества $\mathfrak{M}'$ ставится в соответствие его единственный прообраз M в множестве $\mathfrak{M}$; это отображение также взаимнооднозначно.

Взаимнооднозначное отображение множества на себя, т. е. отображение множества $\mathfrak{M}$ на это же множество $\mathfrak{M}$, называется *преобразованием* множества $\mathfrak{M}$.

В дальнейшем мы будем изучать главным образом различные преобразования плоскости и отображения фигур плоскости, вызываемые этими преобразованиями.

Пример 1. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости точку M', симметричную точке M относительно прямой l (рис. 2). При этом преобразовании каждая точка M плоскости имеет образ — точку M', симметричную точке M относительно прямой l. Каждая точка P прямой l совпадает со своим образом P'. Наконец, каждая точка M' плоскости имеет прообразом точку M, симметричную точке M' относительно прямой l. Отображение симметрии есть взаимнооднозначное отображение плоскости на себя, т. е. преобразова-

ние плоскости. Обратное ему преобразование совпадает с ним самим.

Пример 2. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости точку M' той же плоскости такую, что вектор MM' равен заданному вектору $\boldsymbol{a}$*. Это соответствие называется *переносом;* каждая точка M плоскости имеет образ M', полученный переносом точки M в данном направлении на данное расстояние. Каждая точка M' имеет прообраз, который мы получим переносом точки M' на то же расстояние, но в противоположном направлении (рис. 3).

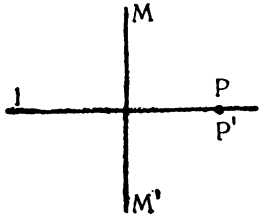


Рис. 2

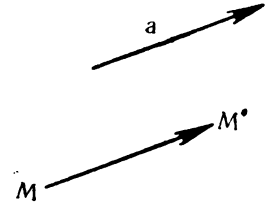


Рис. 3

Таким образом, перенос есть взаимнооднозначное отображение плоскости на себя, т. е. преобразование плоскости. Преобразованием, обратным к нему, является также перенос (на то же расстояние, но в противоположном направлении) (рис. 3).

Пример 3. Пусть на плоскости дана прямоугольная система координат xOy. Возьмем точку M, не совпадающую с началом координат O. Пусть r и φ — полярные координаты точки M. Поставим в соответствие точке $M(r, \varphi)$ точку $M'(r, 2\varphi)$, т. е. точке M мы ставим в соответствие точку M', находящуюся на том же расстоянии от точки O, что и точка M, и такую, что угол от луча Ox до луча OM' вдвое более угла

---

* Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, называются равными, если AB и CD являются противоположными сторонами параллелограмма, две другие стороны которого — AC и BD. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, называются равными, если существует третий вектор $\overrightarrow{EF}$, не лежащий на этой прямой, такой, что $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$. Можно доказать, что два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середина отрезка AD совпадает с серединой отрезка BC (это утверждение верно и тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых и когда они лежат на одной прямой).

от луча Ox до луча OM (рис. 4). Точке O мы поставим в соответствие ее самое. Построенное соответствие есть отображение плоскости на себя. Каждая точка M плоскости имеет образ M', каждая точка M' (r, φ), не совпадающая с точкой O, всегда имеет два прообраза $M\left(r, \frac{\varphi}{2}\right)$ и $M\left(r, \frac{\varphi}{2} + \pi\right)$. Следовательно, это отображение плоскости на себя не является преобразованием.

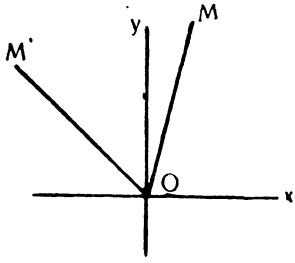


Рис. 4

Пример 4. Рассмотрим полусферу, касающуюся плоскости π. Пусть плоскость граничного круга этой полусферы параллельна плоскости π. Поставим в соответствие точке M плоскости π точку M' той же плоскости, являющуюся проекцией на плоскость π точки P пересечения полусферы с прямой, соединяющей точку M с центром полусферы (рис. 5). Это соответствие *есть отображение плоскости в себя.* Каждая точка M плоскости имеет образ M', лежащий внутри круга, являющегося ортогональной проекцией граничного круга полусферы на плоскость π.

Каждая точка M', лежащая внутри этого круга, имеет прообраз M, тогда как никакая точка M', которая лежит вне этого круга или на его границе, не имеет прообраза.

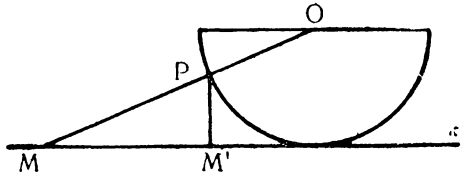


Рис. 5

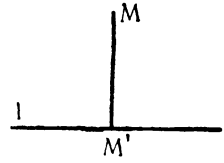


Рис. 6

Пример 5. Поставим в соответствие точке M плоскости ее ортогональную проекцию M' на прямую l (рис. 6). Это соответствие является *отображением плоскости в себя.* В этом отображении каждая точка M плоскости имеет образ M', расположенный на прямой l, каждая точка M' прямой l имеет бесконечное множество прообразов — это точки прямой, проходящей через точку M' перпендикулярно l. Точки, не лежащие на прямой l, не имеют прообразов.

§ 3. ГРУППА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В ряде вопросов геометрии приходится производить не одно, а несколько преобразований, следующих друг за другом. Особенно важным оказывается тот случай, когда рассматривается совокупность преобразований, обладающая тем свойством, что каждую конечную последовательность преобразований этой совокупности можно заменить одним преобразованием той же совокупности, и преобразование, обратное любому из рассматриваемых преобразований, снова принадлежит данной совокупности. Это приводит к понятию *группы преобразований*. Рассмотрение группы преобразований позволяет выделить ряд геометрических свойств, не меняющихся при этих преобразованиях и характеризующих определенную область геометрии. Знание свойств, не меняющихся при преобразованиях той или иной группы, часто позволяет упростить решение конкретных геометрических задач.

Определение. Рассмотрим два произвольных преобразования α и β множества $\mathfrak{M}$. Произведем эти преобразования последовательно. Пусть M' — образ элемента M при преобразовании α, а M'' — образ элемента M' при преобразовании β. Соответствие γ, при котором элементу M ставится в соответствие элемент M'', является взаимнооднозначным отображением множества $\mathfrak{M}$ на себя, т. е. преобразованием. Это преобразование называется *произведением* преобразования β на преобразование α и обозначается так: $\beta\alpha$.

Итак, если

$$\alpha(M) = M', \quad \beta(M') = M'',$$

то по определению

$$(\beta\alpha)(M) = \beta(\alpha(M)) = \beta(M') = M''.$$

Отметим, что, вообще говоря, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, т. е. что $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ — разные преобразования.

Пример 1. Пусть α — симметрия плоскости относительно прямой l, а β — параллельный перенос точек плоскости в направлении вектора $\overrightarrow{PQ}$, перпендикулярного прямой l, на длину этого вектора. Из рис. 7 видно, что если мы сначала перенесем точку M в направлении $\overrightarrow{PQ}$ на длину этого вектора, а затем отразим полученную в результате переноса точку N_1 от прямой l, то точка M займет в итоге положение M_1:

$$M_1 = (\alpha\beta)(M).$$

Если же мы эти преобразования произведем в обратном порядке, то точка M займет положение M_2, отличное от M_1:

$$M_2 = (\beta\alpha)(M).$$

Отсюда и следует, что в данном случае $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

Пример 2. Пусть α и β — два преобразования переноса. В этом случае всегда $\alpha\beta = \beta\alpha$ (рис. 8).

Определение. Преобразование, при котором образ каждого элемента множества $\mathfrak{M}$ совпадает с самим этим элементом, называется *единичным* (или *тождественным*) *преобразованием*.

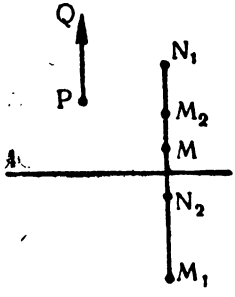


Рис. 7

Мы будем обозначать единичное преобразование буквой ε. Если α — преобразование множества $\mathfrak{M}$, т. е. взаимнооднозначное отображение множества на себя, то и обратное отображение, т. е. соответствие, переводящее каждый элемент M' множества $\mathfrak{M}$ в его прообраз M, также будет взаимнооднозначным отображением множества $\mathfrak{M}$ на себя, т. е. преобразованием множества $\mathfrak{M}$. Мы будем его обозначать через α^{-1} и называть обратным к преобразованию α.

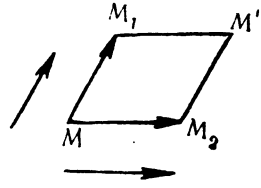


Рис. 8

Докажем, что *умножение преобразований ассоциативно*, т. е. что для всяких трех преобразований α, β, γ всегда $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$. Пусть M — произвольная точка множества $\mathfrak{M}$, M' — образ точки M при преобразовании α, M'' — образ точки M' при преобразовании β, а M''' — образ точки M'' при преобразовании γ. Тогда по определению произведения преобразований точка M при преобразовании $\beta\alpha$ перейдет в точку M'', а точка M' при преобразовании $\gamma\beta$ перейдет в точку M'''. Поэтому:

$$(\gamma(\beta\alpha))(M) = \gamma(M'') = M''',$$

$$((\gamma\beta)\alpha)(M) = (\gamma\beta)(M') = M'''.$$

Но это и означает, что

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha.$$

Далее: если α — любое преобразование, а ε — единичное преобразование, то на основании определения произведения преобразований

$$\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha.$$

Наконец, если α — любое преобразование, а α^{-1} — преобразование, обратное для α, то

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon.$$

Определение. Множество Г, элементами которого являются преобразования α, β, γ, ... множества $\mathfrak{M}$, называется *группой*,

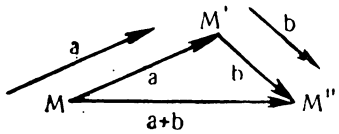


Рис. 9

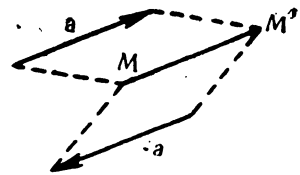


Рис. 10

если оно содержит вместе с каждыми двумя преобразованиями α и β их произведение $\alpha\beta$ и вместе с каждым преобразованием α обратное преобразование α^{-1}.

Пример 3. Множество всех переносов (см. выше, пример 2) образует группу.

В самом деле: пусть α и β — два переноса, определяемые соответственно векторами $\boldsymbol{a}$ и b; это значит, что перенос α переводит точку M в точку M' такую, что $\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{a}$, а перенос β переводит точку M' в точку M'' такую, что $\overrightarrow{M'M''}=b$. Произведение $\beta\alpha$ точку M по определению произведения преобразований переводит в точку M''. По определению суммы * двух векторов $\overrightarrow{MM''}=\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'M''}=\boldsymbol{a}+b=\boldsymbol{c}$ (рис. 9), т. е. $\overrightarrow{MM''}=\boldsymbol{c}$ для любой точки M плоскости. Таким образом, преобразование $\beta\alpha$ есть перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+b$.

Далее: преобразование, обратное переносу α, определяемому вектором $\boldsymbol{a}$, есть снова перенос, определяемый вектором $-\boldsymbol{a}$ (рис. 10).

---

* В векторной алгебре доказывается, что приводимое ниже построение суммы двух векторов приводит к равным между собою векторам, от какой бы точки M мы ни откладывали первый вектор.

Таким образом, множество всех переносов плоскости есть группа (группа переносов). Эта группа содержит бесконечное множество элементов.

Пример 4. Рассмотрим симметрию α плоскости относительно прямой l (см. выше § 2, пример 1). Рассмотрим два преобразования: симметрию α относительно прямой l и единичное преобразование ε. Если применить к плоскости преобразование симметрии дважды, то все точки плоскости останутся на месте, т. е.

$$\alpha\alpha = \varepsilon.$$

Кроме того,

$$\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$$

и

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon.$$

Преобразование α^{-1}, обратное к преобразованию симметрии α, будет само это преобразование α, т. е.

$$\alpha^{-1} = \alpha.$$

Таким образом, множество Γ, состоящее всего из двух элементов: симметрии α и единичного преобразования ε, есть группа.

Пример 5. Мы видели, что множество всех переносов Γ плоскости образует группу. Рассмотрим подмножество Γ_1 переносов, состоящее из всех переносов плоскости, совершаемых в направлении одной и той же прямой в обе стороны. Это множество образует группу. Выделим из этой группы множество Γ_2 всех переносов, совершаемых в направлении выбранной прямой в одну сторону (включая в это множество также и тождественное преобразование). Тогда произведение двух таких переносов будет переносом того же рода; однако перенос, обратный любому из отличных от тождественного, уже множеству Γ_2 переносов не принадлежит, так как совершается в противоположном направлении. Значит, множество Γ_2 не является группой. Выделим из множества Γ_1 всех переносов, совершаемых в обе стороны в направлении некоторой фиксированной прямой, множество Γ_3 переносов, определяемых вектором $n\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор данной прямой, а n — любое нечетное число (как положительное, так и отрицательное) или нуль. Тождественное преобразование принадлежит указанной совокупности переносов ($n = 0$); преобразование, обратное преобразованию, определяемому вектором $n\boldsymbol{a}$, бу-

дет определяться вектором $-n\boldsymbol{a}$, т. е. будет входить в рассматриваемую совокупность. Однако произведение переносов, определяемых векторами $n\boldsymbol{a}$ и $m\boldsymbol{a}$ (n и m — нечетные числа), будет перенос, определяемый вектором $(m+n)\boldsymbol{a}$, и, следовательно, не будет (в случае $m+n \neq 0$) принадлежать нашей совокупности переносов ($m+n$ — четное неравное нулю число). Следовательно, множество Γ_3 переносов не является группой. Наконец, рассмотрим множество переносов Γ_4, определяемых векторами $n\boldsymbol{a}$, где n — любое целое положительное нечетное число. Здесь ни тождественное преобразование, ни обратное для любого из рассматриваемых, ни произведение любых таких переносов не принадлежат совокупности Γ_4 и, следовательно, Γ_4 не группа.

Определение. Пусть Γ — какая-нибудь группа преобразований. Подмножество Γ' множества Γ называется *подгруппой* группы Γ, если:

1) произведение двух любых преобразований, взятых из множества Γ', снова преобразование, входящее в Γ';

2) преобразование, обратное любому преобразованию из Γ', принадлежит Γ'.

Иначе говоря, Γ' есть подгруппа группы Γ, если множество преобразований Γ' само является группой.

Так, например, множество Γ_1 переносов плоскости, совершаемых в направлении одной прямой (см. пример 5 настоящего параграфа), является подгруппой группы всех переносов Γ этой плоскости.

Множество Γ_5 переносов, определяемых векторами $n\boldsymbol{a}$, где n — любое целое число, а $\boldsymbol{a}$ — вектор указанной прямой, в свою очередь является подгруппой Γ_1.

В дальнейшем читатель познакомится с другими примерами подгрупп различных групп преобразований.

ГЛАВА II

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Понятие о преобразовании в геометрии возникло прежде всего из рассмотрения движений. Особенностью же движений, наиболее важной с точки зрения геометрии, является сохранение величины и формы фигуры. Движущаяся фигура во все время движения сохраняет свою форму и размеры, она такова же в конце движения, как и в начале. Таким образом, если брать только начальный и конечный моменты движения, то мы можем установить соответствие между точками фигуры в начальном и конечном ее положении, при котором каждой точке M фигуры F в начальном ее положении ставится в соответствие точка M', в которую переходит точка M, когда фигура F переместится из начального положения в конечное. При этом если точки M и N фигуры F перейдут в точки M' и N', то отрезки MN и $M'N'$ равны между собой. В геометрии под движением понимают не процесс перемещения фигуры, а указанное только что соответствие между точками фигуры в начальном и конечном ее положении; такой подход к делу позволяет рассматривать движения в геометрии как отображения, переводящие каждый отрезок в равный ему отрезок. Такое отображение является простейшим с геометрической точки зрения, поскольку оно сохраняет как форму, так и размеры фигуры, меняя лишь ее расположение. Изучение геометрических преобразований плоскости и пространства мы начнем с изучения такого вида простейших преобразований. Мы не будем называть их движениями, а применим термин «ортогональные отображения» (и преобразования), потому что, кроме движений, существуют и другие преобразования, при которых каждый отрезок переходит в отрезок, ему равный (например, симметрия). При этом и ортогональные отображения, и все последующие геометрические отображения и преобразования мы будем изу-

чать, рассматривая отображения и преобразования всей плоскости или всего пространства. Преобразования и отображения фигур мы будем рассматривать как вызываемые такими преобразованиями и отображениями.

§ 4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение. *Ортогональным отображением плоскости* π *на плоскость* π' называется такое отображение, при котором каждый отрезок плоскости π переходит в равный ему отрезок плоскости π' *.

Ортогональное отображение плоскости π на плоскость π' взаимнооднозначно. В самом деле: 1) двум различным точкам M_1 и M_2 плоскости π всегда соответствуют две различные же точки M_1' и M_2' плоскости π'; это следует из того, что отрезок M_1M_2 равен отрезку $M_1'M_2'$; 2) каждая точка M' плоскости π' имеет прообраз M в плоскости π. В самом деле: возьмем произвольный треугольник ABC в плоскости π. Пусть A', B' и C' — образы точек A, B и C при рассматриваемом отображении. Так как $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $BC = B'C'$, то точки A', B' и C' служат вершинами треугольника $A'B'C'$, равного треугольнику ABC. Точка M' не лежит по крайней мере на одной из прямых $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$. Пусть точка M' не лежит на прямой $A'B'$. Рассмотрим треугольник $A'B'M'$ и треугольник $A'B'M''$, где M'' точка, симметричная точке M' относительно $A'B'$. Построим в плоскости π два треугольника ABM_1 и ABM_2, равных треугольникам $A'B'M'$ и $A'B'M''$. Точка M_1 отстоит от точек A и B на расстояниях M_1A и M_1B; значит образ точки M_1 будет отстоять от точек A' и B' на тех же расстояниях, т. е. он будет совпадать либо с точкой M', либо с точкой M''. Точно так же и образ точки M_2 будет совпадать либо с точкой M', либо с точкой M''. Пусть образ точки M_1 совпадает с точкой M''. Тогда образ точки M_2 должен совпасть с точкой M', ибо точки M_1 и M_2 имеют разные образы. Итак, точка M' имеет прообраз. Из доказанного следует, что каждая точка M' плоскости π' имеет, и при том только один, прообраз, а значит, отображение, обратное ортогональному, также ортогональное.

Определение. *Ортогональное отображение плоскости на себя называется ортогональным преобразованием плоскости.*

---

* Отрезок мы здесь рассматриваем как пару точек — начало и конец отрезка. Равенство отрезков мы считаем понятием элементарным, т. е. не даем ему прямого определения. Понятие равенства отрезков и углов характеризуется соответствующими аксиомами элементарной геометрии.

Произведение двух любых ортогональных преобразований есть ортогональное преобразование; преобразование, обратное к ортогональному, есть снова ортогональное; единичное преобразование плоскости — также ортогональное. Отсюда следует, что *множество всех ортогональных преобразований плоскости образует группу.*

Аналогично определяются ортогональные преобразования пространства.

Множество всех ортогональных преобразований пространства образует группу.

§ 5. СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 1. *При ортогональном отображении всякие три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Пусть P, Q, R — три точки, лежащие на одной прямой, причем, например, точка Q лежит между точками P и R.

Тогда

$$PQ + QR = PR.$$

Пусть точки P, Q, R при ортогональном отображении переходят соответственно в точки P', Q', R'. Так как при ортогональном отображении длины отрезков не меняются, то $P'Q' = PQ$, $Q'R' = QR$, $P'R' = PR$, а потому

$$P'Q' + Q'R' = P'R'.$$

Следовательно, точки P', Q', R' лежат на одной прямой, так как если бы эти точки не лежали на одной прямой, то мы имели бы

$$P'Q' + Q'R' > P'R'.$$

Если точки P, Q, и R не лежат на одной прямой, то их образы P', Q' и R' также не лежат на одной прямой, так как если бы точки P', Q', R' лежали на одной прямой, и, например, точка Q' лежала бы между точками P' и R', то

$$P'Q' + Q'R' = P'R',$$

откуда следовало бы в силу равенства соответствующих отрезков при ортогональном преобразовании, что

$$PQ + QR = PR,$$

что противоречит предположению о непрямолинейном расположении точек P, Q, R.

Теорема 2. *При ортогональном отображении плоскости π на плоскость π' образом прямой l является прямая l' плоскости π'.* Это значит, что всякая прямая l плоскости π, рассматриваемая как множество всех ее точек, отображается взаимнооднозначно на всю прямую l' плоскости π', а не на ее часть, т. е. не только каждой точке прямой l при данном ортогональном отображении соответствует некоторая точка прямой l', но и наоборот: каждая точка прямой l' соответствует некоторой точке прямой l.

Доказательство. Пусть A и B — две произвольные точки, лежащие на прямой l, а A' и B' — их образы; обозначим через l' прямую, проходящую через точки A' и B'. Возьмем произвольную точку C на прямой l. В силу теоремы 1 образ C' точки C лежит на прямой l'.

Таким образом, каждой точке C прямой l соответствует точка C' прямой l'. Возьмем теперь произвольную точку M' на прямой l'. Так как отображение, обратное ортогональному, снова ортогональное, то точка M' прямой l' имеет прообраз M в данном ортогональном преобразовании, расположенный на прямой l.

Мы доказали, что прямая l отображается на прямую l'. Взаимная однозначность этого отображения следует из взаимной однозначности ортогонального отображения.

Прямая l' называется образом прямой l, а прямая l называется прообразом прямой l' в рассматриваемом ортогональном отображении плоскости π на плоскость π'.

Теорема 3. *При ортогональном преобразовании пространства всякая плоскость π ортогонально отображается на некоторую плоскость π'.*

Доказательство. Пусть A, B и C — три точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, а A', B' и C' — образы этих точек при рассматриваемом ортогональном преобразовании пространства. По теореме 1 точки A', B', C' также не лежат на одной прямой.

Пусть π' — плоскость, проходящая через эти точки. Возьмем на плоскости π произвольную точку M. Если точка M лежит на одной из прямых AB, BC или CA, то в силу теоремы 1 ее образ M' будет лежать соответственно на прямой $A'B'$, или $B'C'$, или $C'A'$, т. е. в плоскости π'. Пусть точка M не принадлежит ни одной из прямых AB, BC и CA (рис. 11). Предположим, что прямая MA пересекает прямую BC в точке P. Тогда точка P', являющаяся образом точки P, лежит на пря-

мой $B'C'$ и, следовательно, в плоскости π'. Так как три точки A, M и P лежат на одной прямой, то их образы A', M' и P' также лежат на одной прямой. Но точки A' и P' лежат в плоскости π', следовательно, и точка M', как принадлежащая прямой $A'P'$, целиком лежащей в плоскости π', сама принадлежит этой плоскости π'. Мы показали, таким образом, что плоскость π отображается *в* плоскость π'. Так как отображение, обратное ортогональному, снова ортогональное, то при обратном отображении плоскость π' отображается *в* плоскость π. Отсюда следует, что плоскость π отображается *на* плоскость π'. Взаимная однозначность и ортогональность этого отображения следует из взаимной однозначности рассматриваемого преобразования пространства и сохранения расстояний при таком преобразовании.

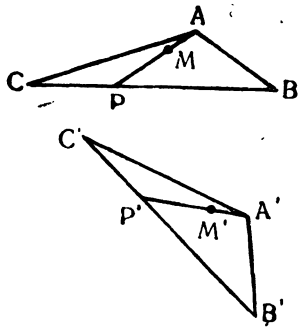


Рис. 11

Теорема 4. *При ортогональном отображении плоскости π на плоскость π' две параллельные прямые плоскости π переходят в две параллельные прямые плоскости π'.*

Доказательство. Две параллельные прямые плоскости π перейдут в силу теоремы 2 в две прямые плоскости π'. Эти последние не будут иметь ни одной общей точки в силу взаимной однозначности отображения плоскости π на плоскость π', т. е. будут параллельны.

Теорема 5. *При ортогональном преобразовании пространства:*

1) *две параллельные прямые переходят в две параллельные прямые;*

2) *две параллельные плоскости переходят в две параллельные плоскости;*

3) *параллельные плоскость и прямая переходят соответственно в параллельные плоскость и прямую.*

Доказательства этих положений мы предоставляем читателю.

Теорема 6. *При ортогональном отображении порядок точек на прямой сохраняется, т. е. внутренние точки отрезка PR переходят во внутренние точки отрезка $P'R'$, являющегося* образом данного отрезка PR, *а точки прямой PR, внешние по*

отношению к отрезку PR, переходят в точки прямой $P'R'$, внешние по отношению к отрезку $P'R'$.

Доказательство. Пусть Q — произвольная внутренняя точка отрезка PR. Тогда $PQ + QR = PR$, следовательно, $P'Q' + Q'R' = P'R'$, где P', Q', R' — соответственно образы точек P, Q, R при рассматриваемом отображении. Отсюда следует, что точка Q' — внутренняя точка отрезка $P'R'$. Точно так же прообраз Q любой внутренней точки Q' отрезка $P'R'$ является внутренней точкой отрезка PR. Таким образом, отрезок PR вместе со всеми своими внутренними точками отображается взаимнооднозначно на отрезок $P'R'$ вместе со всеми его внутренними точками. Отсюда следует, что точки прямой PR, внешние по отношению к отрезку PR, переходят в точки прямой $P'R'$, внешние по отношению к отрезку $P'R'$.

Следствие. *Если точки P и Q лежат по разные стороны от прямой l, то их образы P' и Q' лежат также по разные стороны от прямой l', являющейся образом прямой l.*

Это следует из того, что внутренняя точка R отрезка PQ, лежащего на прямой l, перейдет во внутреннюю точку отрезка $P'Q'$, лежащего на прямой l'.

Если точки P и Q лежат по одну сторону от прямой l, то их образы P' и Q' лежат также по одну сторону от прямой l'.

Теорема 7. *При ортогональных отображениях углы сохраняются.*

Доказательство. Пусть a и b — два луча, выходящие из точки O. Возьмем на лучах a и b соответственно точки A и B, не совпадающие с точкой O. Пусть O', A', B' — образы точек O, A и B при ортогональном отображении. Тогда лучи $O'A'$ и $O'B'$ будут соответственно образами лучей a и b (теорема 6).

В силу ортогональности отображения треугольники OAB и $O'A'B'$ равны, как треугольники с соответственно равными сторонами. Следовательно, угол между лучами OA и OB равен углу между лучами $O'A'$ и $O'B'$.

Теорема 8. *Пусть A, B, C — три произвольные точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, а A', B', C' — три точки плоскости π' такие, что $A'B'=AB$, $B'C'=BC$, $C'A'=CA$; тогда существует и притом только одно ортогональное отображение плоскости π на плоскость π', которое переводит точки A, B, и C соответственно в точки A', B' и C'.*

Доказательство. Построим отображение плоскости π на плоскость π' следующим образом: точкам A, B, и C поставим в соответствие точки A', B' и C'; точке P прямой AC поставим в соответствие точку P' прямой $A'C'$ с соблюдением

следующих условий: если точка P лежит на луче AC, то соответствующую ей точку P' берем на луче $A'C'$ так, чтобы $A'P' = AP$, а если точка P лежит на продолжении луча AC за точку A, то и точку P' возьмем на продолжении луча $A'C'$ за точку A' так, чтобы снова было выполнено равенство $A'P' = AP$ (рис. 12). Отсюда следует, что если P и P_1 — две произвольные точки прямой AC, а P' и P_1' — их образы, то отрезки PP_1 и $P'P_1'$ равны; при этом, если отрезки PP_1 и AC имеют одинаковое направление, то и отрезки $P'P_1'$ и $A'C'$

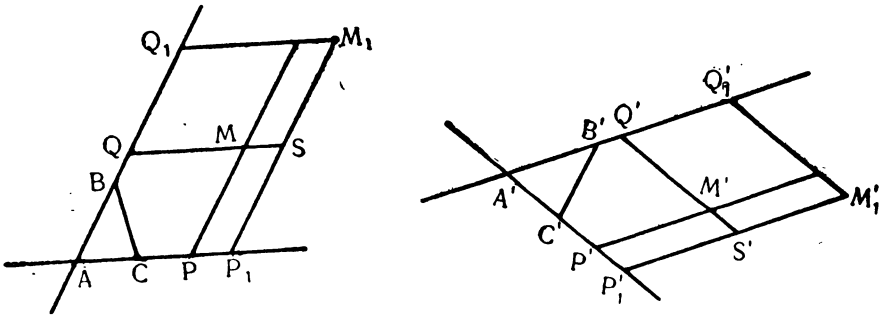


Рис. 12

также имеют одинаковое направление, если же отрезки PP_1 и AC противоположно направлены, то и отрезки $P'P_1'$ и $A'C'$ имеют противоположное направление. Аналогично точке Q, лежащей на прямой AB, ставим в соответствие точку Q' прямой $A'B'$.

Пусть далее, M — произвольная точка плоскости, не лежащая ни на прямой AC, ни на прямой AB. Проведем через точку M прямые, параллельные AB и AC, и пусть эти прямые пересекают AC и AB соответственно в точках P и Q. Пусть P' и Q' — точки прямых $A'C'$ и $A'B'$, соответствующие точкам P и Q. Проведем через точки P' и Q' прямые, параллельные прямым $A'C'$ и $A'B'$; точку M' пересечения этих прямых мы и поставим в соответствие точке M. Докажем, что построенное отображение ортогонально. Пусть M и M_1 — две произвольные точки плоскости π, а M' и M_1' — соответствующие им точки плоскости π'. Проведем как через точку M, так и через точку M_1 прямые, параллельные AC и AB. Пусть прямые, параллельные прямой AB, пересекают AC в точках P и P_1, а прямые, параллельные AC, пересекают AB в точках Q и Q_1. Выполним аналогичное построение в плоскости π'. Пусть

S — точка пересечения прямых MQ и M_1P_1. Этой точке в построенном отображении будет соответствовать точка S' пересечения прямых $M'Q'$ и $M_1'P_1'$. Тогда $MS = PP_1 = P'P_1' = M'S'$ и $SM_1 = QQ_1' = Q'Q_1' = S'M_1'$. Далее: углы BAC и MSM_1 как углы с параллельными сторонами или равны, или в сумме дают два прямых; если эти углы равны, то будут равны и углы $B'A'C'$ и $M'S'M_1'$, если же углы BAC и MSM_1 в сумме составляют два прямых, то и углы $B'A'C'$ и $M'S'M_1'$ также в сумме составляют два прямых. Но $\angle BAC = \angle B'A'C'$, следовательно, всегда $\angle MSM_1 = \angle M'S'M_1'$. Поэтому $\triangle MSM_1 = \triangle M'S'M_1'$ и значит $MM_1 = M'M_1'$. Ортогональность построенного отображения таким образом доказана.

Замечание. Если отрезок MM_1 параллелен AC, то доказательство упрощается: $MM_1 = PP_1 = P'P_1' = M'M_1'$.

Мы доказали, что существует ортогональное отображение, которое точки A, B и C переводит в точки A', B' и C'. Остается доказать единственность такого отображения. Предположим, что некоторым ортогональным отображением точки A, B, C переводятся соответственно в точки A', B', C'. Тогда в силу свойств ортогонального отображения любая точка P луча AC перейдет в точку P' луча $A'C'$ такую, что $AP = A'P'$, а любая точка P, лежащая на продолжении луча AC за точку A, перейдет в точку P', лежащую на продолжении луча $A'C'$ за точку A' и такую, что $A'P' = AP$. Аналогично отображаются точки прямой AB в точки прямой $A'B'$. Пусть, наконец, M — произвольная точка плоскости, не лежащая ни на одной из прямых AC и AB, а P и Q — точки пересечения с AC и AB прямых, проходящих через точку M параллельно AB и AC. Пусть M^* — образ точки M в рассматриваемом ортогональном отображении, а P' и Q' — образы точек P и Q. Так как $PM \parallel AB$, то $P'M^* \parallel A'B'$, а так как $QM \parallel AC$, то $Q'M^* \parallel A'C'$ (теорема 4). Мы видим, что образ M^* точки M есть та точка M', которая в первой части теоремы при построении ортогонального преобразования соответствовала точке M. Единственность ортогонального отображения, переводящего точки A, B, C в точки A', B' C', доказана.

§ 6. ОРИЕНТАЦИЯ

Для более подробного исследования геометрических свойств ортогональных преобразований и установления связи их с понятием движения нам нужно будет ввести важное геометрическое понятие ориентации. Наглядный смысл его заключается в сравнении двух фигур, границам которых приписано определенное направление обхода. Так (рис. 13), о

треугольниках ABC и $A'B'C'$ говорят, что они одинаково ориентированы, так как в обоих случаях обход контуров этих треугольников совершается в одном и том же направлении (по часовой стрелке). Треугольники же ABC и $A''B''C''$ ориентированы противоположно.

С понятием ориентации приходится сталкиваться при отсчете углов, измерении площадей, ограниченных сложными контурами, а также в ряде вопросов высшей математики. Ниже дается математическое определение понятия ориентации.

Определение 1. *Ориентированным треугольником* называется упорядоченная тройка точек (вершины треугольника), не

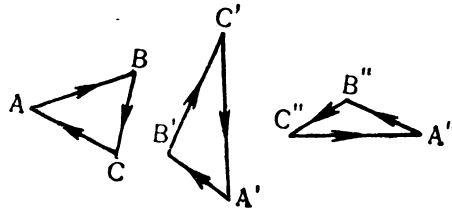


Рис. 13

лежащих на одной прямой, т. е. тройка точек, для которой указано, какая из точек считается первой, какая второй и какая третьей.

При обозначении ориентированного треугольника порядок его вершин определяется порядком их записи.

Определение 2. *Цепью треугольников,* соединяющих ориентированный треугольник ABC с ориентированным же треугольником $A'B'C'$, называется конечная последовательность ориентированных треугольников, первым элементом которой является ориентированный треугольник ABC, последним — ориентированный треугольник $A'B'C'$, и такая, что каждые два соседних треугольника этой последовательности отличаются либо только порядком вершин, либо только одной вершиной, имеющей в обоих треугольниках один и тот же номер.

Теорема 1. *Любые два ориентированных треугольника ABC и $A'B'C'$ можно соединить цепью.*

Доказательство. Искомая цепь:

$$ABC,\ ABQ,\ APQ,\ A'PQ,\ A'B'Q,\ A'B'C',$$

где Q — любая точка, не лежащая ни на прямой AB, ни на прямой $A'B'$, а P — какая-нибудь точка, не лежащая ни на прямой AQ, ни на прямой $A'Q$ (рис. 14).

Определение 3. Будем говорить, что два ориентированных треугольника с одними и теми же вершинами имеют *одинаковый обход,* если вершины второго треугольника получаются круговой перестановкой вершин первого треугольника. Если же вершины второго треугольника не могут быть получены круговой перестановкой вершин первого, то будем говорить, что эти треугольники имеют *противоположный обход.*

Таким образом, треугольники ABC, BCA и CAB имеют одинаковый обход; треугольники ACB, CBA и BAC также имеют одинаковый обход, а каждый из них с любым из треугольников ABC, BCA и CAB имеют противоположный обход.

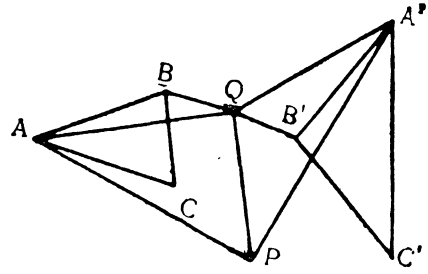


Рис. 14

Определение 4. Будем говорить, что два ориентированных треугольника, отличающиеся только одной вершиной, занимающей в обоих треугольниках одно и то же место, имеют одинаковый обход, если эти вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей общие вершины треугольников. В противном случае будем говорить, что треугольники имеют проти-

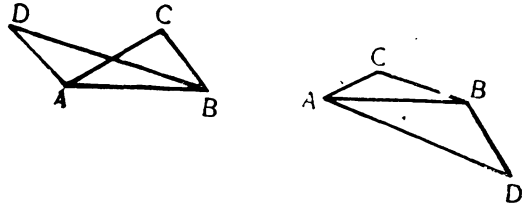
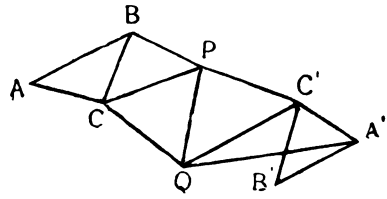


Рис. 15

воположный обход. Так, например, если точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то треугольники ABC и ABD имеют одинаковый обход. Если же точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то треугольники ABC и ABD имеют противоположный обход (рис. 15).

Определение 5. Если в цепи, соединяющей ориентированный треугольник ABC с ориентированным треугольником $A'B'C'$, число пар соседних треугольников, имеющих проти-

воположный обход, четно, то, говорят, что ориентированные треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют *одинаковую ориентацию* (рис. 16); если же это число нечетно, то, говорят, что ориентированные треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют *противопо-*

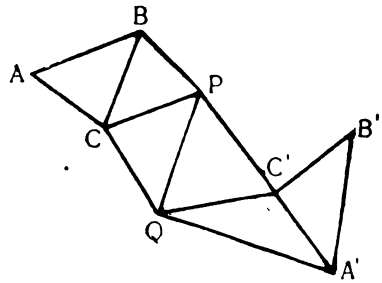


ABC, PBC, PQC, PQC', A'QC', A'B'C'

Рис. 16

ложную ориентацию (рис. 17). Чтобы оправдать это определение, надо еще показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Во всех цепях, соединяющих ориентированный треугольник ABC с ориентированным треугольником $A'B'C'$,*



ABC, PBC, PQC PQC', A'QC', A'B'C'

Рис. 17

число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, или всегда четно, или всегда нечетно.

Иными словами, надо показать, что свойство треугольников иметь одинаковую или противоположную ориентацию не зависит от выбора цепи, соединяющей эти треугольники.

Теорема 2 является следствием следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 — координаты вершин ориентированного треугольника ABC и x_1', y_1'; x_2', y_2';*

x_3', y_3' — координаты вершин ориентированного треугольника $A'B'C'$ в общей декартовой системе координат. Для того чтобы ориентированные треугольники ABC и $A'B'C'$ имели одинаковую ориентацию, необходимо и достаточно, чтобы определители

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

имели один и тот же знак.

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь два соседних треугольника цепи, соединяющей ориентированный треугольник ABC с ориентированным треугольником $A'B'C'$, и пусть эти соседние треугольники отличаются одной вершиной. Пусть это будут, например, треугольники MNS и MNT. Докажем, что определители

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_S & y_S & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix}$$

имеют одинаковые знаки тогда и только тогда, когда точки S и T лежат по одну сторону от прямой MN, т. е. тогда и только тогда, когда, согласно определению 4, ориентированные треугольники MNS и MNT имеют одинаковый обход.

В самом деле: уравнение прямой MN будет

$$\begin{vmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Из аналитической геометрии известно, что точки S и T лежат по одну сторону от прямой MN тогда и только тогда, когда результаты подстановок их координат в левую часть уравнения прямой имеют одинаковые знаки, т. е. когда δ_1 и δ_2 будут иметь один знак.

Если два соседних треугольника цепи отличаются лишь порядком вершин, то соответствующие определители, составленные из координат вершин этих треугольников, в силу свойств определителей, имеют один и тот же знак тогда и только тогда, когда порядок вершин одного треугольника отличается от порядка вершин другого круговой перестанов-

кой, т. е. тогда и только тогда, когда, согласно определению 3, эти треугольники имеют одинаковый обход.

Таким образом, число перемен знака в последовательности определителей, соответствующих треугольникам цепи, соединяющей треугольник ABC с треугольником $A'B'C'$, равно числу пар соседних треугольников этой цепи, имеющих противоположный обход. Поэтому, если определители (1) имеют одинаковый знак, то в последовательности определителей, соответствующих треугольникам цепи, знак меняется четное число раз, независимо от выбора цепи и, следовательно, во всякой цепи, соединяющей треугольник ABC с треугольником $A'B'C'$, число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, всегда четно, т. е. треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию. Аналогично: если определители (1) имеют разные знаки, то треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют противоположную ориентацию.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что два ориентированных треугольника, имеющих одинаковый обход, имеют и одинаковую ориентацию. Треугольники, имеющие противоположный обход, будут иметь и противоположную ориентацию.

Понятие ориентации может быть введено в трехмерном пространстве.

Определение 6. *Ориентированным тетраэдром* называется упорядоченная четверка точек (вершины тетраэдра), не лежащих в одной плоскости.

Определение 7. *Цепью тетраэдров*, соединяющих ориентированный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с ориентированным тетраэдром $A_1'A_2'A_3'A_4'$, называется конечная последовательность ориентированных тетраэдров, первым элементом которой является ориентированный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$, последним — ориентированный тетраэдр $A_1'A_2'A_3'A_4'$ и такая, что каждые два соседних тетраэдра этой последовательности отличаются либо только порядком вершин, либо одной вершиной, имеющей в обоих тетраэдрах один и тот же номер.

Можно доказать, что любые два тетраэдра можно соединить цепью.

Определение 8. Будем говорить, что два ориентированных тетраэдра с одними и теми же вершинами $A_1A_2A_3A_4$ имеют одинаковый обход, если порядок вершин одного получается четной подстановкой вершин другого *.

---

* Мы говорим, что подстановка, переводящая одну последовательность элементов в другую последовательность тех же элементов, *четная*, если вторая последовательность может быть получена из первой четным числом

Определение 9. Будем говорить, что два ориентированных тетраэдра, отличающиеся только одной вершиной, занимающей в последовательности обоих тетраэдров одно и то же место, имеют одинаковый обход, если эти вершины лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через три общие вершины этих тетраэдров. В противном случае будем говорить, что тетраэдры имеют противоположный обход.

Определение 10. Если в цепи, соединяющей ориентированный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с ориентированным тетраэдром $A_1'A_2'A_3'A_4'$ число пар соседних тетраэдров, имеющих противоположный обход, четно, то говорят, что ориентированные тетраэдры $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1'A_2'A_3'A_4'$ имеют одинаковую ориентацию; если же это число нечетно, то говорят, что ориентированные тетраэдры имеют противоположную ориентацию.

Это определение оправдывается следующей теоремой, которая доказывается аналогично теореме 2 настоящего параграфа, т. е. доказательство опирается на свойства определителей: во всех цепях, соединяющих ориентированный тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$ с ориентированным тетраэдром $A_1'A_2'A_3'A_4'$, число пар соседних тетраэдров цепи, имеющих противоположный обход, или всегда четно, или всегда нечетно.

Приведенное определение ориентации трехмерного эвклидова пространства обобщается на случай n-мерного эвклидова пространства.

§ 7. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Теорема 1. *Если какой-нибудь треугольник ABC и его образ $A'B'C'$ при ортогональном преобразовании плоскости имеют одинаковую ориентацию, то одинаковую ориентацию име-*

перестановок пар букв. Если же число таких перестановок нечетно, то и подстановка называется *нечетной*. Так, например, подстановка

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

— четная, так как от последовательности 2, 3, 4, 1 мы можем перейти к последовательности 1, 2, 4, 3 производя следующие две перестановки:

1, 3, 4, 2; 1, 2, 4, 3.

Подстановка

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

— нечетная, так как от последовательности 2, 3, 1, 4 к последовательности 1, 2, 4, 3 мы можем перейти, производя следующие три перестановки:

1, 3, 2, 4; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 4, 3.

Поэтому ориентированные тетраэдры $A_2A_3A_4A_1$ и $A_1A_2A_4A_3$ имеют одинаковый обход, а тетраэдры $A_2A_3A_1A_4$ и $A_1A_2A_4A_3$ — противоположный обход.

ют любой треугольник PQR и его образ $P'Q'R'$ при этом ортогональном преобразовании. Если же треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют противоположную ориентацию, то и треугольники PQR и $P'Q'R'$ имеют противоположную ориентацию.

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию. Докажем, что треугольники PQR и $P'Q'R'$ имеют также одинаковую ориентацию. Пусть, например, треугольники ABC и PQR имеют одинаковую ориентацию. Соединим их цепью. Число пар соседних треугольников этой цепи, имеющих противоположный обход, будет четно. После ортогонального преобразования эта цепь отобразится в цепь, соединяющую треугольник $A'B'C'$ с треугольником $P'Q'R'$. В последней цепи число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, будет тем же самым, что и в первой цепи, т. е. также будет четным (§ 5, следствие из теоремы 6). Значит треугольники $A'B'C'$ и $P'Q'R'$ имеют одинаковую ориентацию, а потому и треугольники PQR и $P'Q'R'$ имеют одинаковую ориентацию. Если же треугольники ABC и PQR имеют противоположную ориентацию, т. е. число пар соседних треугольников цепи, соединяющей ABC и PQR, имеющих противоположный обход, нечетно, то и число пар соседних треугольников цепи, соединяющей $A'B'C'$ и $P'Q'R'$, имеющих противоположный обход, в которую отображается цепь, соединяющая ABC и PQR, также нечетно, т. е. $A'B'C'$ и $P'Q'R'$ имеют противоположную ориентацию. Отсюда следует, что треугольники PQR и $P'Q'R'$ имеют одинаковую ориентацию. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Определение 1. Ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием *первого рода*, если это преобразование сохраняет ориентацию любого треугольника. Если же ориентация меняется на противоположную, то ортогональное преобразование называется ортогональным преобразованием *второго рода* *.

Определение 2. Ортогональное преобразование первого рода называется *движением.*

Обычно движение в механике и физике рассматривается как процесс, в результате которого тело переходит из одного положения в другое. В процессе движения все время сохраняются длины отрезков и величины углов, а также ориентация. В ряде вопросов геометрии нас интересуют лишь начальное и конечное положения тела. Поэтому движение в геомет-

* Эта классификация ортогональных преобразований может быть перенесена на пространство.

рии чаще всего определяется как такое преобразование, которое сохраняет длины отрезков и ориентацию, т. е. как ортогональное преобразование первого рода. Совокупность всех движений есть подгруппа группы всех ортогональных преобразований.

Таким образом, произведение двух ортогональных преобразований первого рода есть ортогональное преобразование первого рода.

Заметим, что произведение ортогонального преобразования первого рода на ортогональное преобразование второго рода есть ортогональное преобразование второго рода; произведение же двух ортогональных преобразований второго рода оказывается преобразованием первого рода. Отсюда, между прочим, следует, что множество ортогональных преобразований второго рода не является группой.

Выше мы доказали (теорема 8, § 5), что если A, B и C — три произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой, а A', B' и C' — точки той же плоскости такие, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, то существует и притом только одно ортогональное преобразование, которое точки A, B, C переводит в точки A', B', C'. Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Существует и притом только одно ортогональное преобразование первого рода, которое две точки A и B переводит соответственно в точки A', B' такие, что $AB = A'B'$. Существует и притом только одно ортогональное преобразование второго рода, которое две точки A и B переводит соответственно в точки A' и B' такие, что $AB = A'B'$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку C, не лежащую на прямой AB. Существует треугольник $A'B'C'$, равный и одинаково ориентированный с треугольником ABC. Существует ортогональное преобразование α, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. Это преобразование первого рода, так как треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$, одинаково ориентированный с треугольником ABC. Всякое ортогональное преобразование первого рода, переводящее точки A и B соответственно в точки A' и B', переведет точку C в точку C', так как существует только один треугольник $A'B'C'$, равный и одинаково ориентированный с треугольником ABC.

Но ортогональное преобразование, переводящее три точки A, B, C в точки A', B', C', определяется единственным образом, следовательно, α — единственное преобразование первого рода, переводящее точки A и B соответственно в точки A'

и B'. Точно так же доказывается существование и единственность ортогонального преобразования второго рода, переводящего точки A и B соответственно в точки A' и B' такие, что $AB = A'B'$.

§ 8. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ПЕРЕНОС, СИММЕТРИЯ, ПОВОРОТ)

В этом параграфе мы рассмотрим основные виды ортогональных преобразований, к которым сводится всякое ортогональное преобразование.

п. 1. Перенос

Пусть дан вектор $\boldsymbol{a}$, лежащий в плоскости π. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости π точку M' той же плоскости, такую, что $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ (рис. 18). Это соответствие есть преобразование плоскости, называемое *переносом*. Таким образом, при переносе каждая точка плоскости перемещается в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

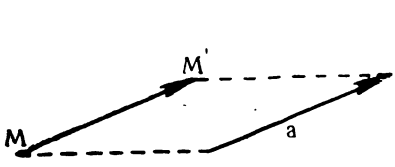


Рис. 18

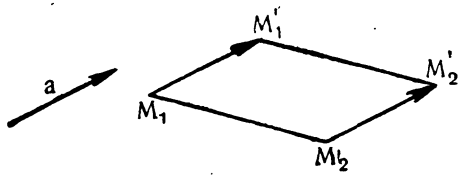


Рис. 19

Перенос есть ортогональное преобразование.

В самом деле: пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки плоскости, а M_1' и M_2' — их образы при указанном переносе (рис. 19). По определению переноса $\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'} = \boldsymbol{a}$. Прибавляя к обеим частям вектор $\overrightarrow{M_1'M_2}$, получим $\overrightarrow{M_1M_1'} + \overrightarrow{M_1'M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2} + \overrightarrow{M_2M_2'}$, или $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$, значит отрезки M_1M_2 и $M_1'M_2'$ равны.

Перенос есть ортогональное преобразование первого рода.

В самом деле: пусть при переносе какая-нибудь точка A переходит в точку B. Пусть при этом же переносе точка B переходит в точку B'. Точки A, B и B' лежат на одной прямой, так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB'} = \boldsymbol{a}$. Возьмем точку C, не лежащую на прямой AB, и пусть C' — ее образ при рассматриваемом пе-

реносе. Докажем, что треугольники ABC и $BB'C'$ имеют одинаковую ориентацию. Рассмотрим цепь треугольников:

$$ABC, \quad C'BC, \quad C'BB', \quad BB'C'.$$

В этой цепи треугольники ABC и $C'BC$ имеют противоположный обход, так как первые вершины A и C' этих треугольников лежат по разные стороны от прямой BC; далее, треугольники $C'BC$ и $C'BB'$ также имеют противоположный обход, так как третьи вершины C и B' лежат по разные стороны от прямой $C'B$. Наконец, треугольники $C'BB'$ и $BB'C'$ имеют одинаковый обход, так как их вершины отличаются круговым порядком. Следовательно, в написанной цепи треугольников обход меняется два раза и значит треугольники ABC и $BB'C'$ имеют одинаковую ориентацию.

Заметим, что преобразование плоскости, при котором всякий вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ переходит в равный ему вектор $\overrightarrow{M_1'M_2'}$, есть перенос, так как из равенства $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$ следует $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_1'} = \overrightarrow{M_2M_1'} + \overrightarrow{M_1'M_2'}$, или $\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'} = \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — некоторый постоянный вектор, не зависящий от выбора точек.

Докажем теперь, что множество всех переносов плоскости вместе с тождественным преобразованием является группой. Пусть перенос α определяется вектором $\boldsymbol{a}$, а перенос β определяется вектором $\boldsymbol{b}$. Возьмем произвольную точку M плоскости. Пусть M' — ее образ при переносе α, так что $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$; пусть, далее, M'' — образ M' при переносе β, т. е. $\overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{b}$. Образом точки M в преобразовании $\beta\alpha$ будет точка M'', а так как $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (см. рис. 9), то это преобразование $\beta\alpha$ также есть перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Если α — перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{a}$, то обратное к нему преобразование α^{-1} есть также перенос, определяемый вектором $-\boldsymbol{a}$. Таким образом, множество всех переносов плоскости образует группу.

п. 2. Симметрия относительно прямой

Пусть на плоскости дана прямая l. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости точку M', симметричную точке M относительно прямой l*.

* Точки M и M' называются симметричными относительно прямой l, если отрезок MM' перпендикулярен к прямой l и его середина лежит на прямой l.

Каждой точке прямой l ставим в соответствие ее самое.

Такое соответствие называется симметрией относительно прямой l (рис. 20).

Симметрия есть ортогональное преобразование второго рода.

Действительно, при симметрии длины отрезков не изменяются, а потому симметрия есть ортогональное преобразование. Это преобразование второго рода. В самом деле: пусть A и B — две точки прямой l, C — произвольная точка, не ле-

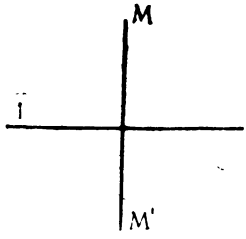


Рис. 20

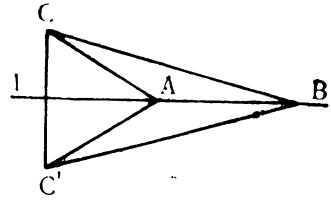


Рис. 21

жащая на прямой l, а C' — точка, симметричная точке C относительно прямой l (рис. 21). Так как образами точек A, B и C будут соответственно точки A, B и C', то треугольник ABC переходит в треугольник ABC'. Эти треугольники по определению имеют противоположный обход. Но мы показали (см. теорему 1, § 7), что в этом случае любой треугольник перейдет в треугольник, имеющий противоположную ориентацию. Следовательно, симметрия есть ортогональное преобразование второго рода.

Симметрию можно определить как такое ортогональное преобразование, отличное от тождественного, при котором по крайней мере две точки остаются неподвижными.

В самом деле: пусть A и B — неподвижные точки ортогонального преобразования α, отличного от тождественного; существует только два ортогональных преобразования: тождественное (первого рода) и симметрия относительно прямой AB (второго рода), которые так же, как и ортогональное преобразование α, оставляют точки A и B на месте. Но по предположению преобразование α — не тождественное, следовательно, α — симметрия относительно прямой AB.

п. 3. Симметрия относительно точки

Пусть на плоскости задана точка O. Поставим в соответствие каждой точке M, отличной от точки O, точку M', симметричную точке M относительно точки O*. Точке O поставим в соответствие самое эту точку. Такое преобразование называется *симметрией* плоскости относительно точки O.

Симметрия плоскости относительно точки есть ортогональное преобразование первого рода.

Действительно, пусть точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно точки O; тогда из равенства треугольников AOB и $A'OB'$ следует, что $AB = A'B'$ (случай, когда точки A и B лежат на одной прямой с точкой O, предоставляется рассмотреть читателю самостоятельно). Следовательно, симметрия относительно точки — ортогональное преобразование. Это ортогональное преобразование первого рода. В самом деле, рассмотрим цепь треугольников:

$$AOB, \quad A'OB, \quad A'OB'.$$

Треугольники AOB и $A'OB$ имеют противоположную ориентацию, так как точки A и A' лежат по разные стороны от прямой OB; треугольники $A'OB$ и $A'OB'$ также имеют противоположную ориентацию, так как точки B и B' лежат по разные стороны от OA'. Следовательно, треугольники AOB и $A'OB'$ имеют одинаковую ориентацию. Таким образом, преобразование симметрии относительно точки есть ортогональное преобразование первого рода.

При симметрии относительно точки каждый отрезок AB переходит в равный ему отрезок $A'B'$, но противоположно направленный **; при этом если точки A, O и B не лежат на од-

---

* Точки M и M' называются симметричными относительно точки O, если точка O является серединой отрезка MM'.

** Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на параллельных прямых, называются *одинаково направленные*, если точки B и B' лежат по одну сторону от прямой AA' (можно показать, что в этом случае точки A и A' лежат по одну сторону от прямой BB'). Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на одной прямой, называются одинаково направленными, если существует вектор $\overrightarrow{CD}$, лежащий на прямой, параллельной AB, и одинаково направленный как с вектором $\overrightarrow{AB}$, так и с вектором $\overrightarrow{A'B'}$.

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на параллельных прямых, называются *противоположно направленными*, если точки B и B' лежат по разные стороны от прямой AA'; два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$, лежащие на одной пря-

ной прямой, то прямые AB и $A'B'$ параллельны, а если точки A, O и B лежат на одной прямой, то на этой прямой лежат точки A' и B'.

Обратно: ортогональное преобразование α, при котором всякий вектор переходит в вектор, противоположно направленный с ним, есть симметрия относительно точки.

В самом деле: пусть при рассматриваемом ортогональном преобразовании точка A переходит в точку A', отличную от A. Возьмем произвольную точку M, не лежащую на прямой AA', и пусть она перейдет в точку M'. Так как преобразование ортогонально, то $AM = A'M'$. Кроме того, по условию векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A'M'}$ имеют противоположное направление. Так как точка M не лежит на прямой AA', а векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A'M'}$ направлены противоположно, то они лежат на параллельных прямых AM и $A'M'$ и потому являются противоположными сторонами параллелограмма, диагонали которого AA' и MM'. Пусть O — точка пересечения этих диагоналей; эта точка является серединой отрезка MM', т. е. точка M' симметрична точке M относительно точки O.

Доказательство того, что образом точки, лежащей на прямой AA', является точка, симметричная ей относительно O, предоставляется читателю.

п. 4. Поворот

Пусть на плоскости фиксирована произвольная точка O и ориентированный угол, т. е. упорядоченная пара лучей OA, OA'. Поставим в соответствие каждой точке M точку M' такую, что:

1) отрезок OM' равен отрезку OM;

2) угол между лучами OM и OM' равен углу между лучами OA и OA';

3) упорядоченные пары лучей (OA, OA') и (OM, OM') — одинаково ориентированы, т. е. треугольник MOM' одинаково ориентирован с треугольником AOA'.

Точке O ставится в соответствие она сама (рис. 22). Такое преобразование называется поворотом вокруг точки O на ориентированный угол (OA, OA').

Таким образом, при повороте каждый отрезок OM «поворачивается» вокруг точки O на один и тот же угол в одном и том же направлении.

мой, называются противоположно направленными, если найдется вектор $\overrightarrow{CD}$, лежащий на прямой, параллельной AB, и имеющий одинаковое направление с одним из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ и противоположное с другим.

Из определения поворота следует, что поворот вокруг точки O будет полностью определен, если для какой-нибудь точки A, отличной от точки O, задан ее образ A', так как этим заданием определяются как угол поворота (OA, OA'), так и «направление» поворота, задаваемое ориентацией треугольника AOA'.

Поворот есть ортогональное преобразование первого рода.

В самом деле: пусть M и N — две произвольные точки, не лежащие на одной прямой с точкой O, а M' и N' — образы этих точек. Тогда по определению поворота $OM' = OM$ и $ON' = ON$. Докажем, что $\angle MON = \angle M'ON'$. Обозначим через OM^* луч, получающийся продолжением луча OM за точку O, а через ON^* луч, получающийся продолжением луча ON за точку O. Рассмотрим последовательно случаи, когда луч OM' проходит внутри угла:

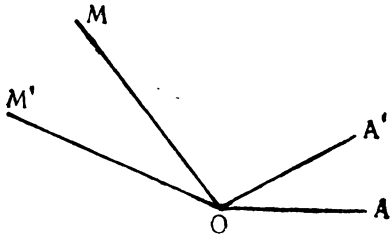


Рис. 22

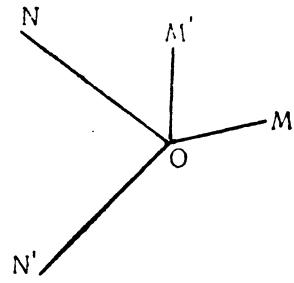


Рис. 23

1°. MON, 2°. M^*ON^*, 3°. M^*ON, 4°. N^*OM.

1°. Предположим сначала, что луч OM' проходит внутри угла MON. Тогда точки M' и N' будут расположены по разные стороны от прямой ON. Действительно, рассмотрим цепь треугольников: MOM', NOM', NON' (рис. 23).

Так как луч OM' проходит внутри угла MON, то точки M и N лежат по разные стороны от прямой OM', а потому треугольники MOM' и NOM' имеют противоположную ориентацию. С другой стороны, треугольники MOM' и NON' имеют одинаковую ориентацию (по определению поворота), значит треугольники NOM' и NON' имеют противоположную ориентацию, следовательно, точки M' и N' лежат по разные стороны от прямой ON. Так как луч OM' проходит внутри угла MON, то $\angle MON = \angle MOM' + \angle M'ON$.

По определению поворота $\angle MOM' = \angle NON'$, поэтому

$$\angle MON = \angle NON' + \angle M'ON.$$

Но по доказанному точки M' и N' лежат по разные стороны от прямой ON, поэтому $\angle M'ON + \angle N'ON = \angle M'ON'$ и, следовательно, $\angle MON = \angle M'ON'$.

2°. Предположим теперь, что луч OM' проходит внутри угла M^*ON^*, вертикального к углу MON (рис. 24).

Рассмотрим точки M'' и N'', симметричные точкам M' и N' относительно точки O. Луч OM'' проходит внутри угла MON. Далее $\angle MOM'' = \angle NON''$ как смежные углы для равных между собою углов MOM' и NON'; треугольники MOM'' и NON''

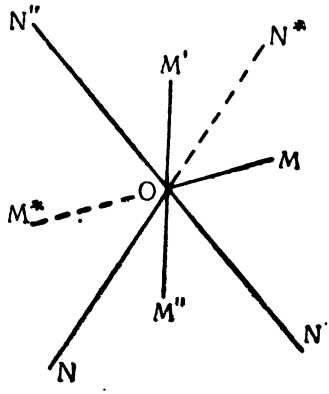


Рис. 24

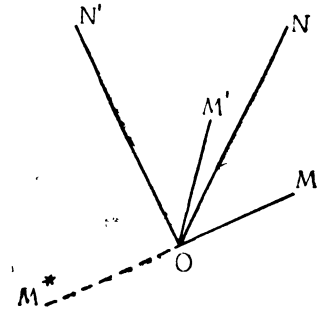


Рис. 25

имеют одинаковую ориентацию. Значит на основании 1° $\angle MON = \angle M''ON''$, но $\angle M''ON'' = \angle M'ON'$ как вертикальные, следовательно, $\angle MON = \angle M'ON'$.

3°. Пусть луч OM' проходит внутри угла M^*ON (рис. 25). Тогда точки M' и N' будут расположены по одну сторону от прямой ON. Действительно, рассмотрим цепь треугольников:

$$MOM', \quad NOM', \quad NON'.$$

Так как луч OM' проходит внутри угла NOM^*, то точки M и N лежат по одну сторону от прямой OM', а потому треугольники MOM' и NOM' имеют одинаковую ориентацию. Но треугольники MOM' и NON' имеют одинаковую ориентацию (по определению поворота), значит и треугольники NOM' и NON' имеют одинаковую ориентацию. Отсюда следует, что точки M' и N' лежат по одну сторону от прямой ON, т. е. лучи OM' и ON' расположены по одну сторону от прямой ON. Так как луч OM' проходит внутри угла NOM^*, то $\angle MON = \angle MOM' - \angle NOM' = \angle NON' - \angle NOM'$, а так как лучи

OM' и ON' лежат по одну сторону от прямой ON, то разность $\angle NON' - \angle NOM'$ равна углу $M'ON'$.

Аналогично рассматривается случай 4°, когда луч OM' проходит внутри угла N^*OM (рис. 26).

Рассмотрение случаев, когда луч OM' совпадает с одним из лучей ON, ON^*, OM^*, предоставляется читателю. Итак, при повороте всегда $\angle MON = \angle M'ON'$. Отсюда и из равенств $OM = OM'$ и $ON = ON'$ следует, что $\triangle MNO = \triangle M'N'O$, следовательно, $MN = M'N'$. Таким образом, поворот — ортогональное преобразование.

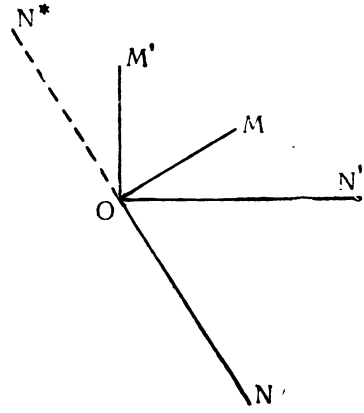


Рис. 26

Это преобразование первого рода. В самом деле: пусть при рассматриваемом повороте точка M переходит в точку M', а точка M' в точку M''. По определению поворота треугольник MOM' и его образ $M'OM''$ имеют одинаковую ориентацию, следовательно, поворот есть ортогональное преобразование первого рода.

Поворот можно определить как ортогональное преобразование, имеющее единственную неподвижную точку.* В самом деле: пусть ортогональное преобразование α имеет единственную неподвижную точку O.

При этом преобразовании любая точка M, отличная от O, переходит в точку M', отличную от M. Существуют два ортогональных преобразования, переводящих точки O и M соответственно в точки O и M', а именно: поворот вокруг точки O на угол MOM' и симметрия относительно биссектрисы угла MOM', но при симметрии, кроме точки O, остаются неподвижными все точки этой биссектрисы; следовательно, рассматриваемое ортогональное преобразование есть поворот вокруг точки O на угол MOM'.

Совокупность всех поворотов около одной и той же точки вместе с поворотом на «развернутый угол» (симметрия относительно точки) и тождественным преобразованием образуют группу. В самом деле: пусть α и β — два поворота вокруг

---

* Здесь под словом *поворот* можно понимать также и поворот на 180° (т. е. симметрию относительно точки O).

точки O. Пусть поворот α переводит точку A в точку A', а поворот β переводит точку A' в точку A''. Произведение $\beta\alpha$ есть ортогональное преобразование первого рода, оставляющее точку O на месте и переводящее точку A в точку A''.

Рассмотрим поворот γ вокруг точки O, переводящий точку A в точку A''; этот поворот γ есть ортогональное преобразование первого рода и так же, как и $\beta\alpha$, переводит точки O и A в точки O и A''. Но существует единственное ортогональное преобразование первого рода, переводящее точки O и A соответственно в точки O и A''; следовательно, $\beta\alpha$ есть *поворот* γ.

Остается доказать, что преобразование, обратное повороту α вокруг точки O, есть также поворот. В самом деле: пусть α — поворот вокруг точки O на угол (OA, OB) и пусть при этом повороте произвольная точка M переходит в точку M'. Тогда $OM = OM'$, $\angle MOM' = \angle AOB$ и $\triangle MOM'$ одинаково ориентирован с треугольником AOB. Преобразование α^{-1} точку O оставляет на месте, а точку M' переводит в точку M, а так как $OM' = OM$, $\angle M'OM = \angle AOB$ и треугольники $M'OM$ и BOA имеют одинаковую ориентацию, то α^{-1} — также поворот вокруг точки O.

§ 9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОСНОВНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ПЕРЕНОСА, СИММЕТРИИ И ПОВОРОТА

Мы изучили различные виды ортогональных преобразований: перенос, симметрию, поворот. В этом параграфе мы покажем, что всякое ортогональное преобразование плоскости сводится к последовательному выполнению этих преобразований.

Теорема 1 (Шаля). *Всякое ортогональное преобразование первого рода есть либо перенос, либо поворот, либо симметрия относительно точки.*

Доказательство. Пусть A — какая-нибудь точка плоскости, B — образ точки A в преобразовании α, а C — образ точки B в том же преобразовании.

Тогда возможны три случая.

1°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление (рис. 27). В этом случае существует перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{AB}$ $(= \overrightarrow{BC})$.

При этом переносе, так же как и при преобразовании α, точки A и B переходят соответственно в точки B и C. Но так как оба эти преобразования первого рода, то данное преобразование α совпадает с указанным переносом.

2°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Так как, в силу ортогональности преобразования α, длины отрезков AB и BC равны между собой, то в этом случае точка C совпадает с точкой A (рис. 28).

Следовательно, преобразование α переводит точку A в точку B, а точку B в точку A. Но это имеет место также и при симметрии плоскости относительно точки O, являющейся серединой отрезка AB, а так как оба эти преобразования первого рода, то преобразование α совпадает с указанной симметрией.

3°. Отрезки AB и BC не лежат на одной прямой (рис. 29). В этом случае преобразование α есть поворот вокруг точки O пересечения перпендикуляров, восстановленных к отрезкам AB и BC в их серединах.

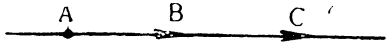


Рис. 27

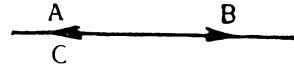


Рис. 28

В самом деле, треугольники AOB и BOC равны между собой, так как $AB = BC$ в силу ортогональности преобразования α, а $OA = OB = OC$ по построению.

Следовательно, $\angle AOB = \angle BOC$. Кроме того, треугольники AOB и BOC одинаково ориентированы, так как точки A и C лежат по разные стороны от прямой OB.

Поэтому поворот вокруг точки O, совмещающий точку A с точкой B, переводит точку B в точку C.

Таким образом, рассматриваемый поворот так же, как и преобразование α, переводит точки A и B в точки B и C, а так как оба эти преобразования первого рода, то данное преобразование α совпадает с указанным поворотом.

Замечание. Если на плоскости даны два равных отрезка AB и $A'B'$ таких, что прямая AA' не параллельна и не совпадает с прямой BB', то преобразование первого рода, переводящее точки A и B соответственно в точки A' и B', есть поворот вокруг точки O пересечения перпендикуляров, восставленных к отрезкам AA' и BB' в их серединах (рис. 30).

В самом деле: существует (и притом только одно) ортогональное преобразование первого рода, которое отрезок AB переводит в равный ему отрезок $A'B'$; по теореме 1 это преобразование может быть или переносом, или симметрией относительно точки или поворотом. Но при переносе каждый отрезок переходит в отрезок, ему параллельный и одинаково с ним направленный; а так как по предположению $AA' \nparallel BB'$,

то рассматриваемое преобразование — поворот вокруг некоторой точки O; следовательно, $OA = OA'$, $OB = OB'$ значит точка O лежит как на перпендикуляре к отрезку AA' в его середине, так и на перпендикуляре к отрезку BB' в его середине.

Теорема 2. *Всякое ортогональное преобразование α второго рода может быть представлено и притом единственным*

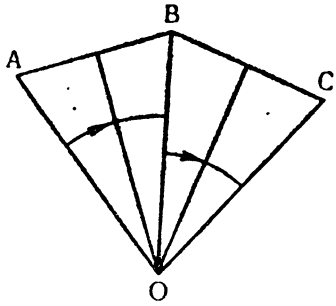


Рис. 29

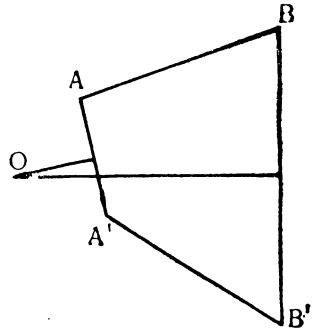


Рис. 30

образом в виде произведения симметрии относительно некоторой прямой на параллельный перенос в направлении этой прямой.

Доказательство. Пусть A—какая-нибудь точка плоскости; B—образ точки A при преобразовании α, а C—образ точки B при том же преобразовании.

Тогда возможны три случая.

1°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление (рис. 31).

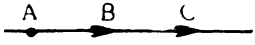


Рис. 31

Обозначим через τ параллельный перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{AB}$ $(=\overrightarrow{BC})$, а через σ — симметрию относительно прямой AB.

Преобразование $\beta = \sigma\tau = \tau\sigma$, являющееся произведением параллельного переноса τ на симметрию σ, так же, как и преобразование α, переводит точки A и B соответственно в точки B и C, а так как оба преобразования α и β второго рода, то $\alpha = \beta = \sigma\tau = \tau\sigma$.

2°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Так как в силу ортогональности преобразования α длины отрезков AB и BC равны между собой, то в этом случае точка C совпадает с точкой A (рис. 32).

Следовательно, преобразование α переводит точку A в точку B, а точку B в точку C.

Но это имеет место также и при симметрии плоскости относительно перпендикуляра, восставленного к отрезку AB в его середине, а так как оба эти преобразования второго рода, то преобразование α совпадает с указанной симметрией.

3°. Отрезки AB и BC не лежат на одной прямой (рис. 33).

Обозначим через l прямую, проходящую через середины отрезков AB и BC, а через D — середину отрезка AC. Тогда преобразование α можно представить как произведение симметрии σ относительно прямой l на параллельный перенос τ вдоль этой прямой, определяемой вектором $\overrightarrow{AD}(=\overrightarrow{DC})$.

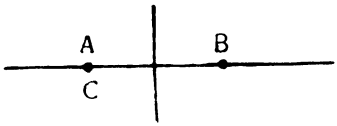


Рис. 32

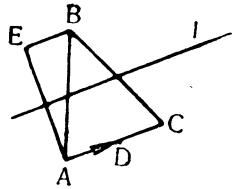


Рис. 33

В самом деле, обозначим через E образ точки A при преобразовании σ симметрии относительно l. Тогда преобразование τ переведет точку E в точку B. Точно так же преобразование σ переведет точку B в точку D, а преобразование τ переведет точку D в точку C.

Следовательно, преобразование $\beta = \tau\sigma = \sigma\tau$, так же, как и преобразование α, переводит точки A и B соответственно в точки B и C. А так как оба эти преобразования второго рода, то $\alpha = \beta = \sigma\tau = \tau\sigma$.

Докажем теперь единственность такого представления.

Для этого заметим, что если параллельный перенос τ не сводится к тождественному преобразованию, то прямая l, относительно которой производится симметрия и вдоль которой производится параллельный перенос, есть единственная прямая, переходящая в себя при преобразовании α, т. е. каждая точка этой прямой имеет образ, являющийся точкой этой прямой. В самом деле: всякая прямая m, пересекающая l, переходит в прямую m', отличную от m (рис. 34). Прямая n, параллельная прямой l, переходит в прямую n', параллельную l и отличную от n (рис. 35). Поэтому если бы существовала

прямая l^* такая, что преобразование α сводилось бы к произведению $\tau^*\sigma^*$ переноса τ^* вдоль этой прямой на симметрию σ^* относительно этой прямой, то прямая l^* должна была бы совпадать с прямой l, а потому $\sigma = \sigma^*$, но тогда и $\tau = \tau^*$. Теорема 2, таким образом, полностью доказана.

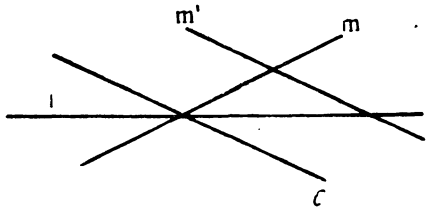


Рис. 34

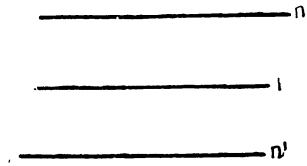


Рис. 35

Теорема 3. *Каждое ортогональное преобразование первого рода можно представить как произведение двух симметрий относительно прямых; каждое же преобразование второго рода либо само является симметрией относительно прямой, либо может быть представлено в виде произведения трех симметрий относительно прямых.*

Доказательство. I. Пусть α—ортогональное преобразование первого рода. Тогда по теореме 1 преобразование α является либо переносом, либо поворотом, либо симметрией относительно точки.

1. Пусть α — перенос. Предположим, что при этом переносе некоторая точка A переходит в точку A' (рис. 36). Пусть l_1— прямая, перпендикулярная к отрезку AA' в его середине, а l_2 — прямая, проходящая через точку A' перпендикулярно AA'. Обозначим через σ_1 и σ_2 симметрии относительно прямых l_1 и l_2.

При преобразовании $\sigma_2\sigma_1$ точка A перейдет в точку A', а точка B, находящаяся на том же расстоянии от прямой l_1, что и точка A, и расположенная от прямой l_1 по ту же сторону, что и точка A, перейдет при этом преобразовании $\sigma_2\sigma_1$ в ту же точку B', что и при преобразовании α. Преобразования α и $\sigma_2\sigma_1$ оба первого рода и оба они переводят точки A и B в точки A' и B'; следовательно, $\alpha = \sigma_2\sigma_1$.

2. Предположим, что α — поворот. Пусть O — неподвижная точка, A — произвольная точка, отличная от O, а A' — образ A при повороте α (рис. 37).

Проведем биссектрису OS угла AOA'. Обозначим через σ_1 и σ_2 симметрии относительно прямых OS и OA'. При преобразовании $\sigma_2\sigma_1$ так же, как и при повороте α, точка O остается

на месте, а точка A переходит в точку A'. А так как оба эти преобразования первого рода, то $\alpha = \sigma_2\sigma_1$.

3. Пусть α — симметрия относительно точки O. Рассмотрим две взаимно-перпендикулярные прямые, проходящие через точку O. Пусть σ_1 и σ_2 — симметрии относительно этих прямых. Тогда $\alpha = \sigma_2\sigma_1$.

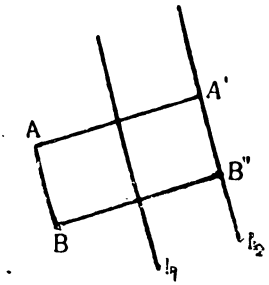


Рис. 36

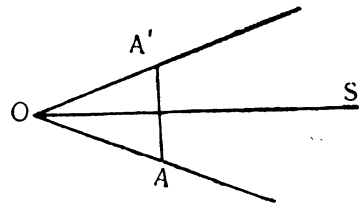


Рис. 37

II. Предположим, что α — ортогональное преобразование второго рода. Тогда α либо само является симметрией относительно прямой, либо представляет собой произведение переноса на симметрию относительно прямой (теорема 2). Но перенос сам может быть представлен в виде произведения двух симметрий относительно прямых. Следовательно, преобразование α представляется как произведение трех симметрий относительно прямых.

Замечание. Представление ортогональных преобразований в виде произведения симметрий — не однозначно.

§ 10. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy с началом в точке O и единичными точками E_1 и E_2. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ при ортогональном преобразовании α. В настоящем параграфе мы выведем формулы, выражающие координаты x' и y' точки M' в выбранной системе xOy через координаты x и y точки M в той же системе.

п. 1. Перенос

Пусть τ — перенос, определяемый вектором $\boldsymbol{t}$. Предположим, что вектор $\boldsymbol{t}$ в системе xOy имеет координаты a и b (рис. 38). Пусть x и y — координаты произвольной точки M, а x' и y' — координаты образа M' точки M при рассматривае-

мом переносе τ. Тогда по определению переноса $MM' = t$. Но два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. Следовательно, вектор $\overrightarrow{MM'}$ так же, как и равный ему вектор t, имеет координаты a и b. Но если начало вектора M имеет координаты x и y, а его конец M' имеет координаты x' и y', то координаты вектора $\overrightarrow{MM'}$ будут равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора $\overrightarrow{MM'}$, т. е. $x'-x$ и $y'-y$.

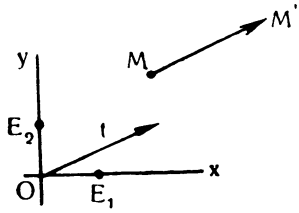


Рис. 38

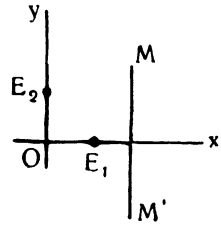


Рис. 39

Таким образом, $x'-x=a$, $y'-y=b$; отсюда

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Так выражается преобразование параллельного переноса в координатах.

п. 2. Симметрия относительно прямой

Пусть σ — симметрия плоскости относительно оси Ox. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости. Тогда точка $M'(x', y')$, симметричная точке M относительно оси Ox, имеет координаты x и $-y$ (рис. 39); поэтому формулы преобразования симметрии относительно оси Ox имеют вид

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

п. 3. Симметрия относительно точки

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — точка, симметричная точке M относительно начала координат O.

Тогда (рис. 40):

$$x' = -x, \quad y' = -y.$$

п. 4. Поворот

Пусть ρ — поворот вокруг начала координат на ориентированный угол φ. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ при повороте ρ. Обозначим через α ориентированный угол (Ox, OM). Тогда (рис. 41):

$$(Ox, OM') = (Ox, OM) + (OM, OM'), \text{ или}$$

$$\alpha' = \alpha + \varphi.$$

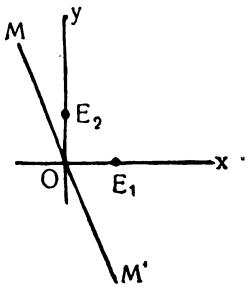


Рис. 40

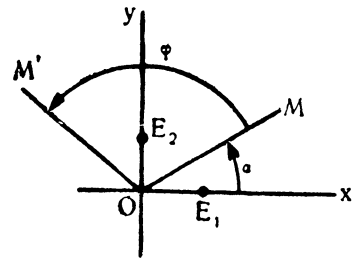


Рис. 41

Обозначим длину отрезка OM (и равного ему отрезка OM') через r. Тогда:

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha,$$

$$x' = r\cos\alpha' = r\cos(\alpha + \varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi =$$
$$= x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$

$$y' = r\sin\alpha' = r\sin(\alpha + \varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi =$$
$$= x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Итак, формулы поворота вокруг начала координат на ориентированный угол φ имеют вид:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

п. 5. Общий случай

I. Пусть α — произвольное ортогональное преобразование первого рода. Пусть при этом преобразовании точка O переходит в точку O', а точка E_1 в точку E_1'. Преобразование α можно представить в виде произведения $\tau\rho$, где ρ — поворот вокруг точки O, при котором отрезок OE_1 переходит в отрезок OE_1^*, равный, параллельный и одинаково направленный с отрезком $O'E_1'$, а τ — перенос, при котором точка O переходит в точку O'. Преобразование $\tau\rho$ так же, как и преобразование α, точки O и E_1 переводит в точки O' и E_1'; а так как оба эти преобразования первого рода, то $\alpha=\tau\rho$. Обозначим через φ ориентированный угол (OE_1, OE_1^*), а через x^* и y^* координаты точки M^*, в которую переходит точка $M(x, y)$ при повороте ρ. Тогда (см. п. 4):

$$x^* = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$

$$y^* = x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

Пусть a и b — координаты точки O'. Перенос τ переводит точку $M^*(x^*, y^*)$ в точку $M'(x', y')$, поэтому (п. 1):

$$x' = x^* + a,$$

$$y' = y^* + b,$$

откуда окончательно:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b.$$

II. Пусть α — произвольное ортогональное преобразование второго рода. Пусть при этом преобразовании точка O переходит в точку $O'(a, b)$, а точка E_1 — в точку E_1'. Преобразование α можно представить в виде $\alpha=\tau\rho\sigma$, где σ — симметрия относительно оси Ox, ρ — поворот вокруг точки O на ориентированный угол φ, при котором отрезок OE_1 переходит в отрезок OE_1^*, равный, параллельный и одинаково направленный с отрезком $O'E_1'$, а τ — перенос, при котором точка O переходит в точку O'. В произведении $\tau\rho\sigma$ точки O и E_1 так же, как и в преобразовании α, переходят соответственно в точки O' и E_1', а так как оба эти преобразования α и $\tau\rho\sigma$ второго рода, то $\alpha = \tau\rho\sigma$. В преобразовании α точка $M(x, y)$ переходит в точку $M^*(x^*, y^*)$ такую, что

$$x^* = x,$$

$$y^* = -y.$$

В преобразовании поворота ρ точка $M^*(x^*, y^*)$ переходит в точку $M^{**}(x^{**}, y^{**})$ такую, что

$$x^{**} = x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi,$$

$$y^{**} = x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi.$$

Наконец, в преобразовании τ точка $M^{**}(x^{**}, y^{**})$ переходит в точку $M'(x', y')$ такую, что

$$x' = x^{**} + a,$$

$$y' = y^{**} + b.$$

Из всех этих соотношений получаем окончательно:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,$$

$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b.$$

Заметим в заключение, что формулы ортогонального преобразования — линейны относительно координат. При этом определитель ортогонального преобразования первого рода равен $+1$:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = +1,$$

а определитель ортогонального преобразования второго рода равен -1:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -1.$$

§ 11. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Ортогональные преобразования пространства определяются точно так же, как и в случае плоскости, и так же, как в случае плоскости, разделяются на преобразования первого и второго рода смотря по тому, сохраняют они или нет ориентацию тетраэдров.

Если A, B, C, D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости, и A', B', C', D' — такие четыре точки, что $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $AD=A'D'$, $BD=B'D'$, $BC=B'C'$, $CD=C'D'$, то существует и притом только одно ортогональное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D'.

Если A, B, C — три произвольные точки пространства, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — три такие точки, что

$AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$, то существует и притом только одно ортогональное преобразование первого рода, которое точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B', C'.

При тех же условиях существует и притом только одно преобразование второго рода, которое точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B' и C'. Доказательство этих теорем проводится аналогично доказательствам соответствующих теорем для плоскости (теорема 8, § 5; теорема 2, § 7).

Множество всех ортогональных преобразований пространства является группой.

Множество всех ортогональных преобразований пространства первого рода составляет подгруппу этой группы.

Основными видами ортогональных преобразований пространства являются: перенос, симметрия относительно плоскости и поворот вокруг оси, включая сюда и симметрию относительно прямой — «поворот на 180°» и симметрию относительно точки.

п. 1. Перенос

Перенос определяется точно так же, как и для плоскости, т. е. каждой точке M ставится в соответствие точка M' такая, что $\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — данный вектор. Перенос есть ортогональное преобразование первого рода. Доказательство того, что перенос есть ортогональное преобразование, проводится аналогично тому, как это было сделано для переноса в плоскости. Докажем, что перенос есть ортогональное преобразование первого рода. Пусть A — произвольная точка, а A' — ее образ при переносе α. Проведем через прямую AA' произвольную плоскость π. Преобразование α осуществляет в плоскости π перенос β. Пусть ABC — произвольный треугольник плоскости π и пусть $A'B'C'$ — его образ при переносе α. Треугольник $A'B'C'$ также лежит в плоскости π и имеет ту же ориентацию, что и треугольник ABC. Пусть S — точка, не лежащая в плоскости π, а S' — ее образ при переносе α. Рассмотрим цепь, соединяющую треугольник ABC с треугольником $A'B'C'$; в этой цепи число пар соседних треугольников, имеющих противоположный обход, четно, так как треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию. Соединяя точку S с вершинами треугольников цепи, мы получим цепь тетраэдров, соединяющую тетраэдр $SABC$ с тетраэдром $SA'B'C'$; тогда число пар соседних тетраэдров цепи, имеющих противоположную ориентацию, будет также четным. Наконец, тетраэдры $SABC$ и $S'A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию, так как S и S' лежат по одну сторону от плоскости π.

Для того чтобы ортогональное преобразование было переносом, необходимо и достаточно, чтобы каждый вектор $\overrightarrow{AB}$ переходил в равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$. Доказательство аналогично случаю плоскости. Все переносы пространства вместе с тождественным преобразованием образуют группу.

п. 2. Симметрия относительно плоскости

Пусть в пространстве задана плоскость π. Поставим в соответствие каждой точке M пространства точку M', симметричную * точке M относительно плоскости π. Каждой точке плоскости π ставится в соответствие сама эта точка.

Такое преобразование пространства называется симметрией относительно плоскости π; плоскость π называется плоскостью симметрии. Аналогично тому, как это было сделано для плоскости, доказывается, что *симметрия относительно плоскости есть ортогональное преобразование второго рода.*

Симметрию относительно плоскости можно определить как такое ортогональное преобразование, отличное от тождественного, при котором по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, остаются неподвижными. Доказательство аналогично случаю плоскости.

п. 3. Симметрия относительно прямой

Пусть в пространстве дана прямая l. Поставим в соответствие каждой точке M, не лежащей на прямой l, точку M', симметричную ** точке M относительно прямой l. Каждой точке прямой l ставится в соответствие сама эта точка. Такое преобразование называется симметрией пространства относительно прямой l, называемой осью симметрии.

Симметрия относительно прямой в пространстве является ортогональным преобразованием первого рода. В самом деле: всякий отрезок, параллельный оси симметрии, переходит при симметрии относительно этой оси в равный ему отрезок, также параллельный этой оси. Всякий отрезок, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси симметрии, переходит в равный

---

* Точки M и M' называются симметричными относительно плоскости π, если отрезок MM' перпендикулярен к плоскости π и его середина лежит на плоскости π.

** Точки M и M' называются симметричными относительно прямой l, если отрезок MM' перпендикулярен прямой l и его середина лежит на прямой l.

ему отрезок, лежащий в той же плоскости (так как в этой плоскости симметрия пространства относительно прямой индуцирует преобразование симметрии относительно точки пересечения этой плоскости с осью). Возьмем произвольный отрезок MN, не параллельный и не перпендикулярный оси симметрии. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную оси симметрии, и опустим из точки N перпендикуляр NP на эту плоскость. Пусть M', N' и P' — образы точек M, N и P при симметрии относительно оси l. Тогда на основании предыдущего $M'P'=MP$, $N'P'=NP$ и $\angle M'P'N'=\angle MPN=90°$; отсюда $M'N'=MN$.

Докажем теперь, что симметрия относительно прямой — ортогональное преобразование первого рода. В самом деле: пусть O и S — две произвольные точки оси l, а A и B — две точки, лежащие в плоскости π, проходящей через точку O перпендикулярно к оси, и такие, что прямая AB скрещивается с прямой OS. Пусть A' и B' — образы точек A и B (при симметрии относительно прямой l). Образы точек O и S будут совпадать соответственно с этими точками. Треугольники AOB и $A'OB'$, лежащие в плоскости π, имеют одинаковую ориентацию. Следовательно, и тетраэдры $SAOB$ и $SA'OB'$ также имеют одинаковую ориентацию.

п. 4. Поворот

Поворотом вокруг прямой l называется преобразование пространства, определяемое следующим образом: проведем произвольную плоскость π, перпендикулярную к прямой l и пересекающую эту прямую в точке O. Пусть β — поворот плоскости π вокруг точки O (см. § 8, п. 4). Возьмем произвольную точку M пространства; пусть P — ее ортогональная проекция на плоскость π, P' — образ точки P при повороте β. Проведем через точку P' перпендикуляр к плоскости π и отложим на нем отрезок $P'M'$, равный отрезку PM и имеющий с ним одинаковое направление. Точку M' мы и поставим в соответствие точке M. Каждой точке прямой l ставится в соответствие сама эта точка. Такое преобразование будем называть поворотом вокруг оси l. Из этого определения следует, что при повороте точка M и ее образ M' лежат в плоскости π^*, перпендикулярной к прямой l и пересекающей ее в точке O^*, причем $O^*M=O^*M'$, $\angle MO^*M'=PO^*P'$, а стороны O^*M и O^*M' угла MO^*M' соответственно параллельны и одинаково направлены со сторонами OP и OP' угла POP' (рис. 42).

Таким образом, поворот α вокруг прямой l индуцирует в каждой плоскости, перпендикулярной к l, поворот вокруг точки пересечения этой плоскости с прямой l на один и тот же угол «в одном и том же направлении». *Поворот есть ортогональное преобразование первого рода.*

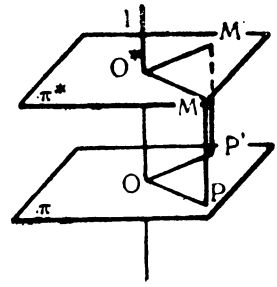


Рис. 42

Поворот пространства определяется, если задана ось поворота и пара соответственных точек A и A' (равноотстоящих от оси и лежащих в плоскости, к ней перпендикулярной). Множество всех поворотов вокруг одной и той же оси, включая сюда тождественное преобразование и симметрию относительно этой оси, является группой (доказательство сводится к рассмотрению поворота в плоскости, перпендикулярной к оси, вокруг точки пересечения оси с этой плоскостью).

п. 5. Симметрия относительно точки

Симметрией относительно точки O называется преобразование, при котором каждой точке A (отличной от O) ставится в соответствие точка A', симметричная A относительно * точки O; точке O ставится в соответствие сама эта точка.

Симметрия пространства относительно точки есть ортогональное преобразование. Это ортогональное преобразование второго рода. В самом деле: рассмотрим тетраэдр $OABC$ и его образ $OA'B'C'$ при симметрии относительно точки O. В цепи:

$$OABC,\quad OABC',\quad OAB'C',\quad OA'B'C'$$

каждые два соседних тетраэдра имеют противоположный обход; таким образом, в указанной цепи обход меняется три раза.

§ 12. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОСНОВНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Теорема 1 (Шаля). *Всякое ортогональное преобразование первого рода, имеющее по крайней мере одну неподвижную*

---

* Точки A и A' называются симметричными относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'.

точку, есть поворот вокруг прямой, проходящей через эту точку. В частном случае это может быть симметрия относительно прямой или тождественное преобразование.

Доказательство. Пусть α — ортогональное преобразование первого рода, оставляющее неподвижной точку O. Возьмем произвольную точку A и пусть B — ее образ. Пусть C — образ точки B при преобразовании α.

Если для всякой точки A точка B совпадает с точкой A, то преобразование α является тождественным.

Предположим теперь, что преобразование α не является тождественным и пусть точка B отлична от точки A; тогда точка C отлична от точки B, так как $BC=AB$. Если точка C совпадает с точкой A, а точки O, A и B не лежат на одной прямой, то преобразование α так же, как и симметрия σ относительно прямой, проходящей через точку O и середину отрезка AB, переводит точки O, A и B соответственно в точки O, B и A. Но так как оба эти преобразования первого рода, то преобразование α является симметрией относительно этой прямой. Если бы точка C совпадала с точкой A и точки O, A и B лежали на одной прямой при любом выборе точки A, т. е. O — середина отрезка AB, то преобразование α было бы симметрией относительно точки O, и мы пришли к противоречию с условием, что α — преобразование первого рода.

Пусть, наконец, точки A, B и C попарно различны. Точки A и B не могут быть симметричны относительно точки O, так как в этом случае точка C должна бы совпасть с A (ибо у отрезков AB и BC была бы общая середина O). Точки A, B и C не могут лежать на одной прямой, так как все они равноудалены от точки O и попарно различны. Через точку O проведем плоскости, перпендикулярные к прямым AB и BC, и пусть l — прямая, по которой пересекаются эти плоскости. Прямая l перпендикулярна к AB и BC и пересекает плоскость ABC в некоторой точке O^*. Рассмотрим поворот β вокруг прямой l, который точку A переводит в точку B. Этот поворот переведет точку B в точку C. В самом деле: $OA=OB=OC$; следовательно, $O^*A=O^*B=O^*C$ и так как $AB=BC$, то $\angle AO^*B=\angle BO^*C$. Кроме того, треугольники AO^*B и BO^*C имеют одинаковую ориентацию, так как точки A и C лежат по разные стороны от прямой O^*B. Таким образом, поворот β так же, как и ортогональное преобразование α первого рода, переводит точки O, A и B, не лежащие на одной прямой, соответственно в точки O, B и C. Следовательно, преобразование α есть указанный поворот β.

Теорема 2. *Всякое ортогональное преобразование первого рода есть либо тождественное преобразование, либо перенос, либо поворот, либо может быть представлено и притом единственным образом в виде произведения поворота вокруг оси на параллельный перенос в направлении этой оси. При этом преобразования поворота и переноса могут быть взяты в любом порядке.*

Доказательство. Пусть α — ортогональное преобразование первого рода; A, B, и C — три произвольные точки пространства, не лежащие на одной прямой; A', B', C' — их образы при преобразовании α. Если точка A совпадает с точкой A', то на основании теоремы 1 α есть или тождественное преобразование, или поворот вокруг оси, проходящей через точку A. Рассмотрим перенос β, определяемый вектором $\overrightarrow{AA'}$, т. е. переводящий точку A в точку A', и пусть B^* и C^* — образы точек B и C при этом переносе β. Если точка B^* совпадает с точкой B', а точка C^* — с точкой C', то преобразование α есть параллельный перенос, так как перенос β так же, как и преобразование α, переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C', и оба они первого рода. Предположим, что преобразование α не сводится к переносу β. Обозначим через γ такое ортогональное преобразование первого рода, которое точку A' оставляет на месте, а точки B^* и C^* переводит соответственно в точки B' и C'. Тогда $\alpha=\gamma\beta$. Так как точка A' в преобразовании γ остается неподвижной и γ — ортогональное преобразование первого рода, то на основании теоремы 1 γ есть поворот вокруг оси l, проходящей через точку A'. Если вектор $\overrightarrow{AA'}$ лежит на прямой l, то преобразование α равно произведению $\gamma\beta$ поворота вокруг оси l на перенос β в направлении этой оси (оба преобразования α и $\gamma\beta$ первого рода и переводят точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C').

Предположим, что вектор $\overrightarrow{AA'}$ не лежит на прямой l. Представим тогда вектор $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA'}$, определяющий перенос β, в виде суммы двух векторов $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$, один из которых $\overrightarrow{AP}$ параллелен оси l, а другой $\overrightarrow{AQ}$ перпендикулярен к ней (рис. 43). Рассмотрим два переноса β_1 и β_2, определяемые соответственно векторами $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AQ}$. Тогда $\beta=\beta_2\beta_1$ и, следовательно, $\alpha=\gamma\beta_2\beta_1$. Положим $\gamma\beta_2=\gamma_1$. Тогда $\alpha=\gamma_1\beta_1$. Преобразование $\gamma_1=\gamma\beta_2$ индуцирует в плоскости π, перпендикулярной l и проходящей через точку A', ортогональное преобразование

первого рода, которое является произведением поворота вокруг точки A' на перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{PA'}$. Но по теореме 1, § 9 это преобразование есть поворот* вокруг некоторой точки O, лежащей в плоскости π. Значит преобразование $\gamma_1=\gamma\beta_2$ индуцирует в плоскости этот поворот и значит по определению поворота само является поворотом вокруг некоторой оси m.

Вернемся к соотношению $\alpha=\gamma_1\beta_1$. Если перенос β_1 сводится к тождественному преобразованию (это будет иметь место тогда, когда вектор $\overrightarrow{AA'}$ будет перпендикулярен к прямой l), то $\alpha=\gamma_1$, т. е. преобразование α есть поворот вокруг оси m. Если β_1 не сводится к тождественному преобразованию, то соотношение $\alpha=\gamma_1\beta_1$ показывает, что преобразование α есть произведение поворота γ_1 вокруг некоторой оси m на перенос β_1 в направлении этой оси. В представлении преобразования $\alpha=\gamma_1\beta_1$ в виде произведения поворота γ_1 на перенос β_1 порядок множителей γ_1 и β_1 можно изменить, т. е. $\alpha=\gamma_1\beta_1=\beta_1\gamma_1$.

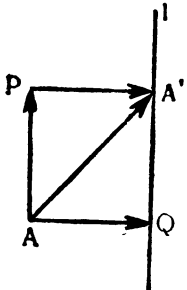


Рис. 43

Остается доказать единственность этого представления. При преобразовании $\alpha=\gamma_1\beta_1$ прямая m переходит в себя. Докажем, что m — единственная прямая, которая при преобразовании α переходит в себя. Мы будем предполагать, что в найденном представлении $\alpha=\gamma_1\beta_1$ ни β_1, ни γ_1 не являются тождественными преобразованиями.

Рассмотрим произвольную прямую p. Предположим сначала, что прямая p скрещивается с осью m. Рассмотрим отрезок SP, концы которого S и P лежат на прямых m и p и который перпендикулярен к ним обеим. После преобразования $\alpha=\gamma_1\beta_1$ прямые m и p перейдут в скрещивающиеся прямые m и p', а отрезок SP в отрезок $S'P'$, отличный от SP, так как при переносе β_1 точка S переходит в отличную от нее точку S', а при повороте γ_1 точка S' остается на месте. В силу сохранения углов при ортогональном преобразовании отрезок $S'P'$ будет общим перпендикуляром к прямым m и p', и так

* По теореме 1, § 9 ортогональное преобразование первого рода в плоскости π есть или поворот, или перенос. В рассматриваемом случае преобразование в плоскости π не может быть переносом, так как тогда $\gamma=\gamma_1\beta_2^{-1}$ как произведение двух переносов было бы переносом, но γ — поворот вокруг оси l.

как он отличен от SP, то прямая p' не совпадает с прямой p.

Предположим далее, что прямая p пересекает ось m в точке S. При переносе β_1 точка S перейдет в точку S', не лежащую на прямой p, а при повороте γ_1 точка S' останется на месте. Следовательно, при преобразовании $\alpha=\gamma_1\beta_1$ точка S прямой p переходит в точку S', не лежащую на прямой p; следовательно, прямая p не переходит в себя.

Пусть, наконец, прямая p параллельна оси m. Тогда при переносе β_1 она перейдет в себя, а при повороте γ_1 она перейдет в прямую p', отличную от p.

Мы показали, таким образом, что единственная прямая, переходящая при преобразовании α в себя, есть прямая m. Предположим, что, кроме представления $\alpha=\gamma_1\beta_1$ (где β_1 — перенос вдоль m, а γ_1 — поворот вокруг m), существует другое представление $\alpha=\gamma_0\beta_0$, где β_0 — перенос вдоль некоторой прямой m_0, а γ_0 — поворот вокруг этой прямой m_0; тогда m_0 будет при преобразовании α переходить в себя. Но единственной прямой, переходящей при преобразовании α в себя, является прямая m. Следовательно, прямые m и m_0 совпадают. Из соотношений $\alpha = \gamma_1\beta_1$ и $\alpha = \gamma_0\beta_0$ следует, что $\gamma_1\beta_1 = \gamma_0\beta_0$, откуда $\beta_1\beta_0^{-1}= \gamma_1^{-1}\gamma_0$. Так как множество всех переносов образует группу, то преобразование $\beta_1\beta_0^{-1}$— перенос (вдоль прямой m); так как множество всех поворотов вокруг оси образует группу, то $\gamma_1^{-1}\gamma_0$ — поворот (вокруг прямой m). При этом повороте $\gamma_1^{-1}\gamma_0$ все точки оси m неподвижны, значит в силу равенства $\beta_1\beta_0^{-1}=\gamma_1^{-1}\gamma_0$ в преобразовании переноса $\beta_1\beta_0^{-1}$ все точки прямой m неподвижны. Отсюда следует, что $\beta_1\beta_0^{-1}$ есть тождественное преобразование и значит $\beta_1 = \beta_0$. Но тогда и $\gamma_1 = \gamma_0$. При доказательстве единственности представления α в виде произведения поворота γ_1 вокруг оси на перенос β_1 в направлении этой оси мы предполагали, что ни одно из преобразований β_1 и γ_1 не является тождественным. В случае, если одно из этих преобразований сводится к тождественному, т. е. α есть либо поворот вокруг оси, либо перенос, то преобразование α не может быть представлено в виде произведения поворота вокруг другой оси на перенос вдоль этой оси.

Теорема 3. *Всякое ортогональное преобразование α второго рода есть либо симметрия относительно плоскости, либо может быть представлено в виде произведения симметрии относительно плоскости на поворот вокруг прямой, перпендикулярной к этой плоскости, или в виде произведения симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости, в зависимости от того,*

имеется ли в данном преобразовании α неподвижная точка или нет.

Такое представление единственно, за исключением того случая, когда α есть произведение симметрии относительно плоскости на «поворот на 180°» вокруг прямой, перпендикулярной к этой плоскости. В этом последнем случае преобразование α есть симметрия относительно некоторой точки O и может быть представлено в виде произведения симметрии относительно любой плоскости, проходящей через эту точку, на «поворот на 180°» вокруг прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к этой плоскости.

Доказательство. 1°. Предположим, что ортогональное преобразование α второго рода имеет неподвижную точку O. Пусть A — произвольная точка такая, что ее образ B не совпадает с A; пусть C — образ точки B при преобразовании α; точка C не совпадает с точкой B.

Если для всякой точки A ее образ B лежит на прямой OA, то $OA = OB$ и рассматриваемое преобразование есть симметрия относительно точки O; оно может быть представлено в виде произведения симметрии относительно любой плоскости π, проходящей через точку O, на «поворот на 180°» вокруг прямой, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости π.

Предположим теперь, что точка B не лежит на прямой OA, и пусть точка C совпадает с точкой A. Тогда преобразование α есть симметрия σ относительно плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно AB, ибо эта симметрия σ переводит точки O, A и B так же, как и преобразование α, соответственно в точки O, B и C, и оба эти преобразования второго рода.

Предположим далее, что точка B не лежит на прямой OA, точка C не совпадает с точкой A и четыре точки O, A, B и C лежат в одной плоскости. Тогда преобразование α есть произведение симметрии σ относительно этой плоскости на поворот ρ вокруг прямой l, проходящей через точку O перпендикулярно к этой плоскости, который точку A переводит в точку B. Этот поворот точку B переводит в точку C, так как треугольники AOB и BOC равны и одинаково ориентированы.

Пусть, наконец, точка B не лежит на прямой OA, точка C не совпадает с точкой A и четыре точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости. Докажем, что в этом случае преобразование α есть произведение симметрии относительно плоскости π, проходящей через точку O и середины отрезков AB и BC,

на поворот вокруг прямой l, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости π. В самом деле: пусть симметрия σ относительно указанной плоскости π переводит точку B в точку B^*. Тогда точки A, B^* и C будут находиться по одну сторону от плоскости π на равных от нее расстояниях. Пусть A_1, B_1^* и C_1 — проекции точек A, B^* и C на плоскость π. Так как $OA = OB^* = OC$, то $OA_1 = OB_1^* = OC_1$, и так как $AB = AB^*$, $BC = B^*C$ и $AB = BC$, то $AB^* = B^*C$; но точки A, B^* и C лежат по одну сторону от плоскости π и находятся от нее на одинаковом расстоянии; следовательно, $A_1B_1^* = AB^*$, $B_1^*C_1 = B^*C$ и поэтому $A_1B_1^* = B_1^*C_1$. Таким образом, $\triangle OA_1B_1^* = \triangle OB_1^*C_1$ и значит $\angle A_1OB_1^* = \angle B_1^*OC_1$.

Рассмотрим поворот ρ вокруг оси l, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости π, который точку A_1 переводит в точку B_1^*; этот поворот ρ точку B_1^* переведет в точку C_1. В силу определения поворота этот же поворот ρ точку A переведет в B^*, а точку B^* — в точку C. Итак, произведение $\rho\sigma$ так же, как и преобразование α, точки O, A и B переводит соответственно в точки O, B и C, а так как оба эти преобразования второго рода, то $\alpha = \rho\sigma$. Заметим, что $\rho\sigma = \sigma\rho$, так что $\alpha = \rho\sigma = \sigma\rho$.

2°. Предположим, что α — ортогональное преобразование второго рода, не имеющее ни одной неподвижной точки. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — их образы при преобразовании α. Рассмотрим перенос β, определяемый вектором $\overrightarrow{AA'}$. Этот перенос переводит точку A в A', а точки B и C в некоторые точки B^* и C^*. Обозначим через γ ортогональное преобразование второго рода, которое точку A' оставляет на месте, а точки B^* и C^* переводит соответственно в точки B' и C'. Тогда $\alpha = \gamma\beta$. На основании доказанного γ есть произведение симметрии σ в плоскости π, проходящей через точку A', на поворот ρ вокруг прямой l, проходящей через точку A' перпендикулярно плоскости π. Таким образом, $\alpha = \sigma\rho\beta$. Представим перенос β в виде произведения $\beta_1\beta_2$ двух переносов β_2 и β_1, один из которых β_2 производится в направлении прямой l, а другой β_1 — параллельно плоскости π. Тогда $\alpha = \sigma\rho\beta_1\beta_2$. Произведение $\rho\beta_1$ поворота ρ вокруг прямой l на перенос β_1 в направлении, параллельном плоскости π, есть поворот ρ_1 вокруг прямой m, перпендикулярной плоскости π. Таким образом,

$$\alpha = \sigma\rho_1\beta_2 = \rho_1\sigma\beta_2.$$

Произведение $\sigma\beta_2$ симметрии σ относительно плоскости π на перенос β_2 в направлении, перпендикулярном к плоскости

π, есть симметрия σ_1 в некоторой плоскости π_1, параллельной π. В самом деле: возьмем три точки P, Q, R, не лежащие на одной прямой и находящиеся на равном расстоянии от плоскости π. Тогда при преобразовании $\sigma\beta_1$ они перейдут в точки P', Q', R' такие, что прямые PP', QQ' и RR' будут перпендикулярны к плоскости π, а точки P', Q' и R' будут находиться на равных расстояниях от этой плоскости. Рассмотрим плоскость π_1, проходящую через середины отрезков PP', QQ' и RR'. Эта плоскость π_1 будет параллельна плоскости π. Симметрия σ_1 относительно этой плоскости так же, как и преобразование $\sigma\beta_2$, есть ортогональное преобразование второго рода, которое точки P, Q и R переводит соответственно в точки P', Q' и R'. Следовательно, $\sigma\beta_2 = \sigma_1$, а потому $\alpha = \rho_1\sigma_1$. Пусть S — точка пересечения прямой m с плоскостью π_1. Эта точка S остается неподвижной как при преобразовании σ_1, так и при преобразовании ρ_1. Следовательно, точка S является неподвижной и при преобразовании α, что противоречит предположению о том, что при преобразовании α нет неподвижных точек. Противоречие получилось потому, что мы предположили, что преобразование γ есть произведение симметрии σ на поворот ρ, значит на основании 1° γ есть симметрия σ относительно плоскости, проходящей через точку A'. Следовательно, $\alpha = \sigma\beta = \sigma\beta_2\beta_1 = \sigma_1\beta_1$, т. е. α есть произведение симметрии относительно плоскости на перенос β_1 в направлении, параллельном этой плоскости. Заметим, что и в этом случае $\alpha = \sigma_1\beta_1 = \beta_1\sigma_1$.

Докажем теперь, что если ортогональное преобразование α второго рода представляется в виде произведения симметрии относительно плоскости на поворот вокруг прямой, перпендикулярной к этой плоскости, или в виде произведения симметрии относительно плоскости на перенос в направлении, параллельном этой плоскости, то такое представление единственно за исключением того случая, когда α представляется в виде произведения симметрии относительно плоскости на «поворот на 180°» вокруг прямой, перпендикулярной к этой плоскости. В этом последнем случае преобразование α есть симметрия относительно некоторой точки O, и, как уже было указано, оно может быть представлено в виде произведения симметрии относительно любой плоскости, проходящей через точку O, на «поворот на 180°» вокруг прямой, проходящей через точку O перпендикулярно к взятой плоскости.

Предположим сначала, что α представляется в виде произведения симметрии σ относительно плоскости π на поворот ρ на угол, отличный от 180°, вокруг прямой l, перпендикулярной плоскости π, и докажем единственность такого представ-

ления. В самом деле: в этом случае единственной инвариантной плоскостью, т. е. плоскостью, переходящей при этом преобразовании α в себя, является плоскость π. Действительно: любая плоскость λ, параллельная плоскости π, переходит в плоскость λ', симметричную плоскости λ, относительно плоскости π. Возьмем любую плоскость μ, пересекающую плоскость π по прямой m. Эта прямая m после симметрии σ останется неподвижной, а после поворота ρ перейдет в прямую m', не лежащую в плоскости μ.

Предположим теперь, что преобразование α представлено в виде произведения симметрии σ^* относительно плоскости π^* на поворот ρ^* относительно прямой l^*, перпендикулярной к плоскости π^*, т. е. $\alpha = \sigma^*\rho^*$. Так как единственной инвариантной плоскостью при преобразовании α является плоскость π, то плоскость π^* совпадает с плоскостью π, а потому $\sigma^* = \sigma$, и из равенства $\sigma\rho = \sigma^*\rho^*$ следует, что $\rho = \rho^*$.

Предположим теперь, что преобразование α представляется в виде произведения симметрии σ_1 относительно плоскости π_1 на перенос β_1 в направлении, параллельном плоскости π, т. е. $\alpha = \beta_1\sigma_1$. Докажем, что в этом случае единственной плоскостью, переходящей в себя с сохранением ориентации треугольников, является плоскость π_1. В самом деле, плоскости, параллельные плоскости π, вообще не являются инвариантными, так как любая такая плоскость λ переходит в плоскость λ', симметричную плоскости λ относительно плоскости π_1. Любая плоскость μ, пересекающая плоскость π по прямой m, не параллельной направлению переноса β_1, переходит в плоскость μ', отличную от μ, так как прямая m переходит в прямую m', параллельную прямой m и, следовательно, не лежащую на плоскости μ. Рассмотрим плоскость ν, которая пересекает плоскость π_1 по прямой n, параллельной направлению переноса β_1. Такая плоскость перейдет при преобразовании $\alpha=\beta_1\sigma_1$ в плоскость ν', симметричную плоскости ν относительно плоскости π_1, и поэтому будет инвариантной лишь в том случае, когда она перпендикулярна плоскости π_1.

Итак, совокупность всех плоскостей, инвариантных при преобразовании $\alpha = \beta_1\sigma_1$, состоит из плоскости π_1 и всех плоскостей, перпендикулярных плоскости π_1 и пересекающих ее по прямым, параллельным направлению переноса β_1. Но в каждой инвариантной плоскости, перпендикулярной к плоскости π_1, ориентированный треугольник переходит в треугольник с противоположной ориентацией, так как в такой плоскости преобразование $\alpha = \beta_1\sigma_1$ индуцирует ортогональное преобразование второго рода. В инвариантной же плоскости π_1 ори-

ентация треугольников сохраняется, так как α индуцирует в этой плоскости перенос.

Предположим, что, кроме представления $\alpha = \sigma_1\beta_1$, существует другое представление $\alpha = \sigma_0\beta_0$ в виде произведения симметрии σ_0 относительно плоскости π_0 на перенос β_0 в направлении, параллельном плоскости π_0. На основании доказанного плоскость π_0 совпадает с плоскостью π_1; следовательно, $\sigma_0 = \sigma_1$, а потому $\beta_0 = \beta_1$.

Теорема 4. *Всякое ортогональное преобразование первого рода можно представить в виде произведения двух или четырех симметрий относительно плоскостей, а всякое ортогональное преобразование второго рода есть либо симметрия относительно плоскости, либо может быть представлено в виде произведения трех симметрий относительно трех плоскостей.*

Доказательство.

I. Пусть α — ортогональное преобразование первого рода. По теореме 2 настоящего параграфа преобразование α есть либо поворот, либо перенос, либо представляется в виде произведения поворота на перенос в направлении оси поворота.

1°. Если α — поворот, то оно может быть представлено в виде произведения двух симметрий относительно плоскостей, проходящих через ось поворота. В самом деле: пусть l — ось поворота, A и B — две точки прямой l и C — точка, не лежащая на прямой l. Образы точек A, B и C при повороте α будут A, B, и C'. Пусть π_1 — биссекторная плоскость двугранного угла $C(AB)C'$, а π_2 — плоскость ABC'. Обозначим через σ_1 и σ_2 симметрии относительно этих плоскостей. Тогда при преобразовании $\sigma_2\sigma_1$ так же, как и при преобразовании α, точки A, B и C перейдут в точки A, B и C', а так как оба эти преобразования α и $\sigma_2\sigma_1$ первого рода, то $\alpha=\sigma_2\sigma_1$.

2°. Пусть α — перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{AA'}$. Тогда $\alpha = \sigma_2\sigma_1$, где σ_1 — симметрия относительно плоскости π_1, проходящей через середину отрезка AA' перпендикулярно к прямой AA', а σ_2 — симметрия относительно плоскости π_2, проходящей через точку A' параллельно плоскости π_1.

3°. Пусть $\alpha = \rho\tau$ есть произведение поворота ρ вокруг прямой l на перенос τ в направлении прямой l. На основании доказанного в 1° и 2° α представляется в виде произведения четырех симметрий относительно четырех плоскостей.

II. Пусть α — ортогональное преобразование второго рода. По теореме 3 преобразование α есть либо симметрия относительно плоскости, либо представляется в виде произведения симметрии относительно плоскости на поворот или перенос,

а так как и поворот, и перенос представляются в виде произведения двух симметрий, то преобразование α либо является симметрией относительно плоскости, либо может быть представлено в виде произведения трех симметрий относительно трех плоскостей.

Замечание 1. Представление ортогональных преобразований в виде произведения симметрий относительно плоскостей не однозначно.

Замечание 2. Если преобразование α первого рода не является поворотом, переносом и тождественным преобразованием, то его нельзя представить в виде произведения двух симметрий относительно двух плоскостей, так как произведение двух симметрий относительно двух плоскостей есть всегда поворот, если эти плоскости пересекаются; перенос, если эти плоскости параллельны, и тождественное преобразование, если эти плоскости совпадают. В этом случае преобразование α представляется в виде произведения четырех симметрий, так как одна симметрия или произведение трех симметрий есть ортогональное преобразование второго рода.

§ 13. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА В КООРДИНАТАХ

Введем в пространстве декартову прямоугольную систему координат с началом в точке O и единичными точками E_1, E_2, E_3.

Поставим в соответствие точке M (x, y, z) точку M' (x', y', z'), координаты которой выражаются через координаты точки M линейными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + c, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 &= 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 &= 1, \\ a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} &= 0, \\ a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} &= 0, \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Докажем, что преобразование является ортогональным. Для этого надо доказать, что если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки пространства, а M_1' (x_1', y_1', z_1') и M_2' (x_2', y_2', z_2') — их образы при преобразовании (1), то $M_1M_2 = M_1'M_2'$ или, что то же самое, $M_1M_2^2 = M_1'M_2'^2$.

Действительно,

$$M_1'M_2'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 =$$

$$= [(a_{11}x_2 + a_{12}y_2 + a_{13}z_2 + a) - (a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1 + a)]^2 +$$

$$+ [(a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23}z_2 + b) - (a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1 + b)]^2 +$$

$$+ [(a_{31}x_2 + a_{32}y_2 + a_{33}z_2 + c) - (a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1 + c)]^2 =$$

$$= [a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1) + a_{13}(z_2 - z_1)]^2 +$$

$$+ [a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1) + a_{23}(z_2 - z_1)]^2 +$$

$$+ [a_{31}(x_2 - x_1) + a_{32}(y_2 - y_1) + a_{33}(z_2 - z_1)]^2 =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)(x_2 - x_1)^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)(y_2 - y_1)^2 +$$

$$+ (a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2)(z_2 - z_1)^2 +$$

$$+ 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) +$$

$$+ 2(a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33})(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) +$$

$$+ 2(a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31})(z_2 - z_1)(x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = M_1M_2^2$$

в силу соотношений (2).

Докажем теперь, что если α — ортогональное преобразование, которое произвольной точке M (x, y, z) ставит в соответствие точку M' (x', y', z'), то координаты точки M' выражаются через координаты точки M соотношениями (1), причем будут выполнены условия (2). В самом деле пусть $O'(a, b, c)$, E_1' (p_1, q_1, r_1), E_2' (p_2, q_2, r_2), E_3' (p_3, q_3, r_3) — образы точек O $(0, 0, 0)$, E_1 $(1, 0, 0)$, E_2 $(0, 1, 0)$ E_3 $(0. 0. 1)$ в ортогональном преобразовании α.

Положим в формулах (1):

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= p_1 - a, & a_{12} &= p_2 - a, & a_{13} &= p_3 - a, \\ a_{21} &= q_1 - b, & a_{22} &= q_2 - b, & a_{23} &= q_3 - b, \\ a_{31} &= r_1 - c, & a_{32} &= r_2 - c, & a_{33} &= r_3 - c. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Тогда

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = (p_1 - a)^2 + (q_1 - b)^2 + (r_1 - c)^2 =$$

$$= O'E_1'^2 = OE_1^2 = 1$$

и аналогично

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1,$$

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1.$$

Далее, так как α — ортогональное преобразование, то $\triangle E_1'O'E_2'$ прямоугольный, причем $O'E_1' = O'E_2' = 1$. Значит

$$E_1'E_2'^2 = O'E_1'^2 + O'E_2'^2 = 2,$$

или

$$(p_2 - p_1)^2 + (q_2 - q_1)^2 + (r_2 - r_1)^2 = 2,$$

или

$$(a_{11} - a_{12})^2 + (a_{21} - a_{22})^2 + (a_{31} - a_{32})^2 = 2,$$

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 - 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) + a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 2.$$

Но

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1,$$

следовательно,

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0.$$

Аналогично доказываются два последних соотношения в условиях (2).

Ортогональное преобразование β, определяемое формулами (1), где a_{ik} определяются соотношениями (3), так же, как и ортогональное преобразование α, переводит точки O, E_1, E_2, E_3 соответственно в точки O', E_1', E_2', E_3'. Значит на основании единственности ортогонального преобразования, определяемого четырьмя парами соответственных точек (§ 11), преобразование α совпадает с преобразованием β.

Замечание 1. В формулах (1) ортогонального преобразования числа a_{11}, a_{21}, a_{31} являются косинусами углов луча $O'E_1'$ с осями Ox, Oy, Oz; a_{12}, a_{22}, a_{32} — косинусы углов луча $O'E_2'$ с осями Ox, Oy, Oz, а a_{13}, a_{23}, a_{33}—косинусы углов луча $O'E_3'$ с осями Ox, Oy, Oz.

Замечание 2. Если α — ортогональное преобразование первого рода, то тетраэдры $OE_1E_2E_3$ и $O'E_1'E_2'E_3'$ имеют одинаковую ориентацию, и в этом случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

если же α — ортогональное преобразование второго рода, то тетраэдры $OE_1E_2E_3$ и $O'E_1'E_2'E_3'$ имеют противоположную ориентацию, и в этом случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -1.$$

Частные случаи. Если ортогональное преобразование α есть поворот вокруг оси Oz, то формулы (1) принимают вид:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$
$$z' = z.$$

Если α — перенос, при котором точка O (0, 0, 0) переходит в точку O' (a, b, c), то формулы (1) принимают вид:

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b,$$
$$z' = z + c.$$

Если α — симметрия относительно плоскости xOy, то формулы (1) принимают вид:

$$x' = x,$$
$$y' = y,$$
$$z' = -z.$$

ГЛАВА III

ПОДОБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Как мы видели в предыдущей главе, ортогональные преобразования оставляют неизменными как форму фигуры, так и ее размеры. Если отказаться от требования сохранения размеров фигуры и рассматривать лишь такие преобразования, при которых остается неизменной ее форма, то мы получим группу подобных преобразований. Эти преобразования, не изменяя формы фигуры, увеличивают или уменьшают все ее размеры в одно и то же число раз.

Элементарная геометрия изучает те свойства фигур, которые сохраняются при ортогональных преобразованиях, а также и те свойства, которые сохраняются при преобразованиях подобия.

§ 14. ОТОБРАЖЕНИЕ ПОДОБИЯ

Отображение α плоскости π на плоскость π' называется *отображением подобия* с коэффициентом $k > 0$ (или подобием), если оно обладает следующим свойством: если A и B — две любые точки плоскости π, а A' и B' — их образы при отображении α, то $A'B' = k \cdot AB$. Если $k = 1$, то отображение подобия является ортогональным отображением. Так же, как и для ортогональных отображений, доказывается, что отображение подобия взаимнооднозначно.

Отображение α^{-1} плоскости π' на плоскость π, обратное отображению α подобия с коэффициентом k плоскости π на плоскость π', есть отображение подобия плоскости π' на плоскость π с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Отображение подобия плоскости π *на* себя называется *преобразованием подобия,* или *подобным преобразованием.* Произведение двух любых подобных преобразований (с ко-

эффициентами k_1 и k_2) есть подобное преобразование (с коэффициентом k_1k_2); единичное преобразование плоскости можно рассматривать как подобное преобразование (с коэффициентом 1). Отсюда следует, что множество всех подобных преобразований образует группу; группа ортогональных преобразований есть подгруппа этой группы.

§ 15. СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При отображении подобия три точки A, B и C, лежащие на одной прямой, переходят в три точки A', B', C', также лежащие на одной прямой с сохранением порядка. В самом деле: пусть точки A, B и C лежат на одной прямой и, например, точка B лежит между точками A и C; тогда $AB + BC = AC$, но по определению подобия

$$A'C' = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A'B' + B'C'.$$

Таким образом, точки A', B', C' лежат на одной прямой и точка B' лежит между точками A' и C'. Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то их образы A', B' и C' в отображении подобия также не лежат на одной прямой, так как из неравенства $AB + BC > AC$ следует неравенство $A'B' + B'C' > A'C'$.

При отображении подобия плоскости π на плоскость π' образом прямой l (плоскости π) является прямая l' (плоскости π').

При отображении подобия отношение любых двух отрезков равно отношению образов этих отрезков. В самом деле: пусть AB и CD — два произвольных отрезка плоскости π, $A'B'$ и $C'D'$ — образы этих отрезков в отображении подобия. Тогда $A'B' = kAB$, $C'D' = kCD$, откуда

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

В отображении подобия параллельные прямые переходят в параллельные (в силу взаимной однозначности отображения). При подобных отображениях сохраняются углы. В самом деле: рассмотрим произвольный угол с вершиной A; возьмем на его сторонах точки B и C. Пусть A', B', C' — образы точек A, B и C в отображении подобия. Тогда

$$A'B' = kAB,\ B'C' = kBC,\ C'A' = kCA.$$

Поэтому треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$ и, следовательно, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Отсюда, в частности,

следует, что при подобном отображении взаимно-перпендикулярные прямые переходят во взаимно-перпендикулярные прямые.

Если на плоскости π заданы три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, а A', B', C' — три точки плоскости π', такие, что $A'B'=kAB$, $B'C'=kBC$, $C'A'=kCA$, то существует и притом только одно отображение подобия плоскости π на плоскость π', при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. В самом деле: возьмем на луче $A'B'$ точку B^* такую, что $A'B^*=AB$, а на луче $A'C'$ точку C^* такую, что $A'C'^*=AC$. В силу соотношений $B'C'=kBC$, $C'A'=kCA$, $A'B'=kAB$ треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны и, следовательно, $\angle B'A'C'=\angle BAC$. Отсюда и из равенств $A'B^*=AB$, $A'C^*=AC$ следует, что $\triangle A'B^*C^*=\triangle ABC$ и потому $B^*C^*=BC$. На основании теоремы 8, § 5 существует ортогональное отображение β, которое точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B^* и C^*.

Пусть M — произвольная точка плоскости π, а M^* — ее образ на плоскости π' при отображении β. Рассмотрим преобразование γ плоскости π', которое точке M^* плоскости π' ставит в соответствие точку M', лежащую на луче $A'M^*$ и такую, что $A'M'=kA'M^*$. Поставим теперь в соответствие точке M плоскости π точку M' плоскости π'. Это соответствие и будет отображением подобия, которое точкам A, B и C ставит в соответствие точки A', B' и C'. В самом деле: пусть M и N — две произвольные точки плоскости π, M^* и N^* их образы при отображении β, а M' и N' — образы точек M^* и N^* при преобразовании γ. Тогда в силу свойств ортогональных отображений

$$AM = A'M^*, \quad AN = A'N^*, \quad MN = M^*N^* \quad \text{и}$$
$$\angle MAN = \angle M^*A'N^*.$$

Из определения преобразования γ следует, что $A'M'=kA'M^*$, $A'N'=kA'N^*$, $\angle M'A'N'=\angle M^*A'N^*$, откуда $M'N'=kM^*N^*=kMN$. Указанное отображение подобия переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C'.

Остается доказать единственность такого отображения. Пусть α' — отображение подобия, которое так же, как и отображение α, точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B' и C'. Рассмотрим преобразование ε плоскости π, определяемое следующим образом: пусть M — произвольная точка плоскости π, M' — ее образ (в плоскости π') при отображении α, а $\tilde{M}$ — прообраз M' в отображении α'. Поставим в соответствие точке M точку $\tilde{M}$. Это преобразование ε орто-

гональное и оставляет на месте точки A, B и C. Следовательно (по теореме 8, § 5), ε — тождественное преобразование, значит точка $\tilde{M}$ совпадает с M, а потому $\alpha=\alpha'$.

При подобном отображении окружность переходит в окружность (доказательство предоставляется читателю). Подобное преобразование называется подобным преобразованием первого рода, если оно сохраняет ориентацию любого треугольника. Если же ориентация любого треугольника меняется на противоположную, то подобное преобразование называется подобным преобразованием второго рода.

Существует и притом только одно подобное преобразование первого рода, которое две точки A и B переводит соответственно в две произвольные точки A' и B'.

Существует и притом только одно подобное преобразование второго рода, которое две точки A и B переводит соответственно в две произвольные точки A' и B'.

Эти предложения доказываются так же, как и соответствующие утверждения для ортогональных преобразований.

§ 16. ГОМОТЕТИЯ

Гомотетией с центром O и коэффициентом k, где k — положительное число, не равное 1, называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке M, отличной от O, ставится в соответствие точка M', лежащая на луче OM и такая, что $\frac{OM'}{OM}=k$. Точке O ставится в соответствие сама эта точка.

Теорема. *Гомотетия γ с центром O и коэффициентом k есть преобразование подобия первого рода с коэффициентом k.*

Доказательство. Пусть A и B — две произвольные точки, лежащие на прямой, проходящей через точку O. Если точки A и B лежат на одном луче, выходящем из точки O, то отрезок AB есть разность отрезков OB и OA, например, $AB=OB-OA$. Но по определению гомотетии точки A' и B', являющиеся образами точек A и B, лежат на этом же луче, причем $OA'=kOA$, $OB'=kOB$; следовательно,

$$A'B' = OB' - OA' = kOB - kOA = k(OB - OA) = kAB.$$

Пусть точки A и B не лежат на прямой, проходящей через точку O. Тогда из определения гомотетии следует, что

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k,$$

и так как $\angle AOB=\angle A'OB'$, то $\triangle AOB \sim \triangle A'OB'$, а потому

$$\frac{A'B'}{AB} = k$$

для любой пары точек A и B.

Докажем теперь, что гомотетия есть преобразование первого рода. Пусть A и B — две точки, не лежащие на одной прямой с точкой O, а A' и B' — их образы в гомотетии γ. В цепи треугольников:

$$OAB, \quad OA'B, \quad OA'B'$$

обе пары соседних треугольников имеют одинаковый обход; следовательно, треугольники OAB и $OA'B'$ имеют одинаковую ориентацию.

Из предыдущего следует, что при гомотетии образ каждой прямой параллелен или совпадает с этой прямой, причем направление прямой сохраняется, т. е. вектору $\overrightarrow{AB}$ (лежащему на прямой l) соответствует в преобразовании гомотетии вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (лежащий на прямой l'), одинаково направленный с вектором $\overrightarrow{AB}$.

Обратно: подобное преобразование α с коэффициентом $k \neq 1$, при котором образ l' каждой прямой l или параллелен, или совпадает с прямой l, причем направления прямых сохраняются, есть гомотетия. В самом деле: найдется прямая l, которая в преобразовании α переходит в прямую l', параллельную l, так как если бы каждая прямая переходила в себя, то такое преобразование было бы тождественным. Пусть l — такая прямая, A и B — две произвольные точки этой прямой, а A' и B' — их образы в преобразовании α. Так как $k \neq 1$, то отрезок $A'B'$ не равен отрезку AB, а так как $AB \| A'B'$, то прямые AA' и BB' пересекаются в некоторой точке O. Так как векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ одинаково направлены, то точки A и A' лежат на одном луче, выходящем из точки O; точки B и B' также лежат на одном луче, выходящем из точки O.

Рассмотрим гомотетию γ с центром в точке O и с коэффициентом k. Гомотетия γ точку O оставляет на месте. Докажем, что и преобразование α точку O оставляет на месте. В самом деле: прямая OA в преобразовании α может перейти или в прямую, параллельную OA, или в прямую, совпадающую с OA. Но так как образ A' точки A лежит на прямой OA и образ прямой OA должен проходить через точку A', то прямая OA при преобразовании α перейдет в себя. Точно так же прямая OB переходит в себя, значит при преобразовании α

точка O неподвижна. Подобное преобразование α так же, как и гомотетия γ, переводит точки O, A и B соответственно в точки O, A' и B', а потому $\alpha=\gamma$.

Замечание 1. Гомотетию с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ можно определить как преобразование, при котором произвольной точке M плоскости ставится в соответствие точка M' такая, что вектор $\overrightarrow{OM'}$ равен произведению числа k на вектор $\overrightarrow{OM}$, т. е. $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$. Это определение может быть принято и для случая $k<0$; тогда точки M и M' будут лежать по разные стороны от точки O, причем $OM' : OM=|k|$.

Вместо векторов $\overrightarrow{OM'}$ и $\overrightarrow{OM}$ в соотношении $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$ можно брать и их координаты $\overline{OM'}$ и $\overline{OM}$ на оси OM, причем положительное направление выбирается произвольно.

Геометрические преобразования позволяют во многих случаях дать простое решение геометрических задач, которые без применения этих преобразований решаются значительно сложнее. Покажем это на примере применения преобразования гомотетии к доказательству следующих геометрических теорем, принадлежащих знаменитому математику Эйлеру.

1. Во всяком треугольнике ABC три точки: точка H пересечения высот, точка G пересечения медиан и центр O описанной окружности лежат на одной прямой; точка G лежит между точками O и H и делит отрезок OH в отношении $1:2$, т. е.

$$OG : GH = 1 : 2.$$

2. Середины сторон треугольника ABC, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности s, называемой окружностью Эйлера. Радиус окружности Эйлера равен половине радиуса описанной окружности; центр ω окружности Эйлера есть середина отрезка OH, концами которого являются центр описанной окружности и точка пересечения высот.

Доказательство. Рассмотрим гомотетию γ с центром G и коэффициентом $k=-\frac{1}{2}$. При этой гомотетии вершины A, B, C треугольника ABC перейдут в середины противоположных сторон, а потому высоты треугольника перейдут в медиатрисы * его сторон (так как при гомотетии каждая прямая переходит в прямую, ей параллельную). Значит точка H пересечения высот треугольника при гомотетии γ перей-

* Медиатрисой отрезка называется перпендикуляр к этому отрезку в его середине.

дет в точку O пересечения медиатрис его сторон, т. е. в центр окружности, описанной около треугольника ABC. Отсюда следует, что точки H и O лежат по разные стороны от точки G и $OG : GH = 1 : 2$.

Окружность S, описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность s, проходящую через середины сторон треугольника, причем центр ω этой окружности будет образом точки O при гомотетии γ, т. е. середина отрезка OH; радиус же окружности s, проходящей через середины сторон треугольника, будет в два раза меньше радиуса окружности S, описанной около треугольника ABC, так как абсолютная величина коэффициента гомотетии равна $\frac{1}{2}$. Так как центр ω окружности s есть середина отрезка OH, то он равноудален от проекций точек O и H на стороны треугольника ABC. Но проекции точки H на стороны треугольника ABC являются основаниями его высот; следовательно, окружность s пройдет и через основания высот треугольника ABC.

Теперь рассмотрим гомотетию γ_1 с центром H и коэффициентом $k_1 = +\frac{1}{2}$. При гомотетии γ_1 точка O (так же как и при гомотетии γ) перейдет в середину ω отрезка OH, а описанная окружность S перейдет, следовательно, в окружность с центром ω и радиусом, в два раза меньшим радиуса окружности S. Значит при гомотетии γ_1 окружность S (как и при гомотетии γ) перейдет в окружность s. Но при гомотетии γ_1 точки A, B и C перейдут соответственно в середины отрезков HA, HB и HC, которые будут лежать на окружности s.

Окружность s называется окружностью девяти точек, или окружностью Эйлера для треугольника ABC.

Замечание 2. Пусть A', B', C' — вторые точки пересечения высот треугольника ABC с окружностью S, описанной около него. Так как точки A' B', C' лежат на окружности S, то их образы при гомотетии γ_1 должны лежать на окружности s Эйлера; с другой стороны, образы точек A', B', C' должны остаться на высотах треугольника ABC, поэтому образы этих точек при гомотетии γ_1 являются точками пересечения высот треугольника ABC с окружностью Эйлера и должны поэтому совпасть с основаниями высот (так как середины отрезков AH, BH и CH есть образы точек A, B и C при гомотетии γ_1). Таким образом, точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

Замечание 3. В § 17 и § 18 мы будем рассматривать гомотетии лишь с положительными коэффициентами.

§ 17. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОДОБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГОМОТЕТИИ НА ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Теорема 1. *Всякое подобное преобразование α с коэффициентом $k \neq 1$ или является гомотетией, или может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования ω на гомотетию γ с коэффициентом k и с центром в произвольной точке O плоскости.*

Доказательство. Пусть α — подобное преобразование с коэффициентом $k \neq 1$, O — произвольная точка плоскости, O' ее образ в преобразовании α. Пусть преобразование α некоторую точку A переводит в точку A'. Рассмотрим гомотетию γ с центром в точке O и коэффициентом k. Гомотетия γ оставляет точку O на месте, а точку A переводит в некоторую точку A^* такую, что $OA^*=kOA$. Но $O'A'=kOA$; следовательно, $O'A'=OA^*$. Рассмотрим ортогональное преобразование ω (того же рода, что и α), которое точки O и A^* переводит соответственно в точки O' и A'. Преобразование $\omega\gamma$ так же, как и преобразование α, точки O и A переводит соответственно в точки O' и A', а так как преобразования $\omega\gamma$ и α одного рода, то $\omega\gamma=\alpha$. Если точки O и A^* совпадают соответственно с O' и A', то ω — тождественное преобразование и, следовательно, преобразование α — гомотетия γ с центром в точке O и коэффициентом k.

Теорема 2. *Всякое подобное преобразование α плоскости есть либо ортогональное преобразование, либо гомотетия, либо представляется в виде произведения гомотетии γ с центром в точке O на поворот ρ вокруг этой точки (включая сюда и симметрию относительно точки O — «поворот на 180°»), если преобразование α первого рода, либо в виде произведения гомотетии γ с центром O на симметрию σ относительно прямой, проходящей через точку O, если преобразование α второго рода. Представление α в виде произведений указанных преобразований не зависит от их порядка и может быть осуществлено единственным образом.*

Доказательство. Пусть α — подобное преобразование с коэффициентом k. Если $k=1$, то α — ортогональное преобразование. Во всем дальнейшем мы будем предполагать, что $k \neq 1$, т. е. что подобное преобразование α не является ортогональным.

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ α — ПОДОБНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРВОГО РОДА С КОЭФФИЦИЕНТОМ $k \neq 1$

Возьмем произвольную точку A и пусть B — ее образ. Пусть C — образ точки B в рассматриваемом преобразова-

нии α. Тогда $\frac{BC}{CA}=k$. Возможны три случая.

1°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление. Возьмем на прямой AB точку O, лежащую вне отрезка AB и такую, что

$$\frac{OB}{OA}=k.$$

Если $k>1$, то точка O лежит на продолжении отрезка AB за точку A и, следовательно, вне отрезка AC. Поэтому

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB+BC}{OA+AB}=\frac{kOA+kAB}{OA+AB}=k.$$

Если же $k<1$, то точка O лежит на продолжении отрезка AB за точку B и так как

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OB}{OB+BA}=k$$

и

$$\frac{BC}{AB}=k,$$

то $OB>BC$, а потому точка O лежит и на продолжении отрезка BC за точку C. Таким образом,

$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB-BC}{OA-AB}=\frac{kOA-kAB}{OA-AB}=k.$$

Рассмотрим гомотетию γ с центром в точке O и коэффициентом k. Гомотетия γ так же, как и преобразование α, точки A и B переводит соответственно в точки B и C, а так как оба эти преобразования первого рода, то $\alpha=\gamma$.

2°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой и имеют противоположные направления. Возьмем на прямой AB точку O, лежащую внутри отрезка AB и такую, что

$$\frac{OB}{OA}=k.$$

Если $k>1$, то в силу соотношения

$$\frac{BC}{AB}=k$$

точка C лежит на продолжении отрезка AB за точку A и потому

$$\frac{OC}{OB}=\frac{BC-OB}{AB-OA}=\frac{kAB-kOA}{AB-OA}=k.$$

Если $k<1$, то

$$\frac{OB}{OA}=k$$

и

$$\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{AO+OB}=k,$$

или

$$BC=k(OA+OB)=k\left(\frac{OB}{k}+OB\right)=OB(1+k),$$

откуда следует, что $BC>OB$, т. е. точка O лежит между точками B и C. Таким образом,

$$\frac{OC}{OB}=\frac{BC-OB}{AB-OA}=\frac{kAB-kOA}{AB-OA}=k.$$

Мы видим, что

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}=k,$$

точки A и B лежат по разные стороны от точки O и точки B и C также лежат по разные стороны от точки O. Рассмотрим гомотетию γ с центром O и коэффициентом k и симметрию σ относительно точки O. Произведение $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ этих преобразований так же, как и преобразование α, точки A и B переводит соответственно в точки B и C, а так как оба эти преобразования первого рода, то $\alpha=\gamma\sigma=\sigma\gamma$.

3°. Отрезки AB и BC не лежат на одной прямой. Построим окружность S_1, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой BC в точке B, и окружность S_2, проходящую через точки B и C и касающуюся прямой AB в точке B. Одна из точек пересечения этих окружностей есть точка B, обозначим другую точку их пересечения буквой O. Пусть P — точка, лежащая на продолжении отрезка CB за точку B, а Q — точка, лежащая на продолжении отрезка AB за точку B. Тогда $\angle AOB=\angle PBA$, так как оба они измеряются половиной дуги AB; $\angle BOC=\angle QBC$, так как они измеряются половиной дуги BC. Но $\angle PBA=\angle QBC$ (как вертикальные), поэтому

$$\angle AOB=\angle BOC.$$

Далее, $\angle OAB=\angle OBC$, так как оба эти угла измеряются половиной дуги OB окружности S_1.

Рассмотрим поворот ρ вокруг точки O, при котором луч OA переходит в луч OB. Тогда в силу равенства $\angle AOB = \angle BOC$ луч OB перейдет в луч OC. Пусть при этом повороте точки A и B перейдут соответственно в точки A^* и B^* (лежащие соответственно на лучах OB и OC). Так как поворот есть ортогональное преобразование, то $A^*B^* = AB$ и $\angle OA^*B^* = \angle OAB = \angle OBC$. Отсюда следует, что $A^*B^* \| BC$. Рассмотрим гомотетию γ с центром в точке O, которая точку A^* переводит в точку B. Так как $A^*B^* \| BC$, то точка B^* при этой гомотетии перейдет в точку C. Коэффициент гомотетии γ будет равен:

$$\frac{BC}{A^*B^*} = \frac{BC}{AB} = k.$$

Произведение $\rho\gamma = \gamma\rho$ поворота ρ на гомотетию γ так же, как и преобразование α, точки A и B переводит соответственно в точки B и C, а так как преобразование $\rho\gamma$ и α — оба первого рода, то

$$\rho\gamma = \gamma\rho = \alpha.$$

Теперь докажем, что если α — подобное преобразование первого рода представляется в виде произведения поворота на гомотетию с центром в неподвижной точке поворота, то такое представление α возможно осуществить лишь единственным образом.

В самом деле: если подобное преобразование $\alpha = \rho\gamma$, где ρ — поворот вокруг некоторой точки O (включая и поворот на 180°), а γ — гомотетия относительно этой точки, то O — единственная неподвижная точка преобразования α. Поэтому если α представлено еще в виде произведения $\rho^*\gamma^*$, где ρ^* — поворот вокруг точки O^*, а γ^* — гомотетия относительно точки O^*, то точки O^* и O совпадают. Из равенства

$$\rho\gamma = \rho^*\gamma^*$$

следует, что

$$\gamma\gamma^{*-1} = \rho^*\rho^{-1}.$$

Но произведение $\rho^*\rho^{-1}$ поворотов вокруг точки O есть снова поворот или тождественное преобразование, значит $\gamma\gamma^{*-1}$ есть также поворот или тождественное преобразование. Произведение $\gamma\gamma^{*-1}$ гомотетий относительно одной и той же точки O не может быть поворотом вокруг этой точки, значит $\gamma\gamma^{*-1}$ есть тождественное преобразование, откуда $\gamma = \gamma^*$, а потому и $\rho = \rho^*$.

II. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ α — ПОДОБНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВТОРОГО РОДА С КОЭФФИЦИЕНТОМ $k \neq 1$

Возьмем произвольную точку A и пусть B — ее образ. Пусть C — образ точки B при рассматриваемом преобразовании α. Тогда

$$\frac{BC}{AB} = k.$$

1°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой l и имеют одинаковое направление.

Как было уже доказано (см. выше, I, 1°), существует гомотетия γ с коэффициентом k и с центром в точке O, лежащим на прямой l, которая переводит точку A в точку B, а точку B в точку C. Обозначим через σ симметрию относительно прямой l. Симметрия σ все точки прямой l оставляет на месте. Поэтому произведение гомотетии γ на симметрию σ так же, как и преобразование α, точки A и B переводит соответственно в точки B и C, а так как преобразования $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ и α оба второго рода, то $\alpha=\gamma\sigma=\sigma\gamma$.

2°. Отрезки AB и BC лежат на одной прямой l и имеют противоположные направления. В этом случае существует гомотетия γ с коэффициентом k и с центром в точке O, лежащим на прямой l (см. I, 2°), такая, что произведение этой гомотетии на симметрию относительно точки O переводит точки A и B соответственно в точки B и C. Обозначим через σ симметрию относительной прямой l^*, проходящей через точку O перпендикулярно прямой l. Симметрия σ переводит каждую точку прямой l в точку, ей симметричную относительно точки O. Поэтому произведение гомотетии γ на симметрию σ так же, как и преобразование α, точки A и B переводит соответственно в точки B и C, а так как преобразования $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ и α оба второго рода, то $\alpha=\gamma\sigma=\sigma\gamma$.

3°. Отрезки AB и BC не лежат на одной прямой. Возьмем на отрезках AB и BC соответственно точки P и Q такие, что $BP : PA = CQ : QB = k \neq 1$. Пусть A^* и B^* — точки, симметричные точкам A и B относительно прямой PQ. Точки A и C лежат по одну сторону от прямой PQ, а точка B — по другую, поэтому точки A^* и B лежат по одну сторону от прямой PQ (а A, B^* и C — по другую). Отношение расстояний точек B и A^* до прямой PQ равно $k \neq 1$, поэтому эти расстояния различны и, следовательно, прямая A^*B пересекает прямую PQ в некоторой точке O, которая лежит вне отрезка A^*B, так как точки A^* и B лежат по одну сторону от прямой PQ.

Так как ,

$$\frac{CQ}{QB} = k,$$

то

$$QB = \frac{BC}{k+1} = \frac{k}{k+1} AB,$$

а так как

$$\frac{BP}{PA} = k,$$

то

$$PB = \frac{k}{k+1} AB$$

и значит $BQ=PB$, значит $\angle BPQ=\angle BQP$. Так как точки A^* и B^* симметричны точкам A и B относительно PQ, то $\angle B^*PQ=\angle BPQ$; следовательно, $\angle B^*PQ=\angle BQP$ и значит $A^*B^*\|BC$.

Докажем, что прямая B^*C проходит через точку O. Обозначим через C^* точку пересечения прямых BC и OB^*. Так как $A^*B^*\|BC$, то $C^*Q : QB=B^*P : PA^*=PB : PA=k$, но $CQ : QB=k$; следовательно, точка C^* совпадает с точкой C. Так как $\triangle OA^*B^*$ подобен треугольнику OBC, то

$$\frac{OB}{OA^*} = \frac{BC}{A^*B^*} = \frac{BC}{AB} = k.$$

Рассмотрим симметрию σ относительно прямой PQ. Эта симметрия переводит точки A и B соответственно в точки A^* и B^*. Гомотетия γ с центром в точке O и коэффициентом k переведет точку A^* в точку B, а потому точку B^* в точку C (так как $A^*B^*\|BC$ и образ точки B^* должен лежать на луче OB^*). Таким образом, преобразование $\gamma\sigma=\sigma\gamma$ так же, как и преобразование α, переводит точки A и B соответственно в точки B и C, а так как оба они второго рода, то $\alpha=\gamma\sigma=\sigma\gamma$.

Докажем теперь, что если подобное преобразование α второго рода представляется в виде произведения симметрии σ относительно прямой l на гомотетию γ с центром в точке O, лежащей на прямой l, то такое представление единственно. В самом деле: O — единственная неподвижная точка преобразования α. Поэтому если преобразование α будет представлено в виде произведения $\sigma^*\gamma^*$ симметрии σ^* относительно

прямой l^* на гомотетию γ^* относительно точки O^*, лежащей на прямой l^*, то точки O^* и O будут совпадать. Теперь из равенства

$$\sigma\gamma = \sigma^*\gamma^*$$

следует, что

$$\sigma^{*-1}\sigma = \gamma^*\gamma^{-1}.$$

Произведение $\sigma^{*-1}\sigma$ симметрий относительно прямых, проходящих через одну и ту же точку O, есть поворот или тождественное преобразование. Произведение $\gamma^*\gamma^{-1}$ гомотетий относительно точки O есть гомотетия с центром в этой точке или тождественное преобразование. Но $\sigma^{*-1}\sigma=\gamma^*\gamma^{-1}$ значит оба эти преобразования тождественные и потому $\sigma=\sigma^*$ и $\gamma=\gamma^*$.

§ 18. ПОДОБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ

п. 1. Гомотетия

Пусть γ — гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k. Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке O. Пусть x и y — координаты произвольной точки M, а x' и y' — координаты ее образа M'. Опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ на оси Ox и Oy, а из точки M' — перпендикуляры $M'P'$ и $M'Q'$ на те же оси (рис. 44). Тогда

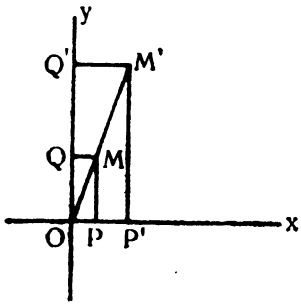


Рис. 44

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = k,$$

следовательно,

$$OP' = kOP,$$

$$OQ' = kOQ.$$

Так как, кроме того, точки P и P' лежат на одном луче оси Ox, а точки Q и Q' лежат на одном луче оси Oy, то из этих равенств следует, что

$$x' = kx,$$

$$y' = ky.$$

п. 2. Подобное преобразование (общий случай)

Пусть α — подобное преобразование с коэффициентом k. Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ в подобном преобразовании α.

На основании теоремы 1 предыдущего параграфа преобразование α с коэффициентом k может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования ω (того же рода, что и данное преобразование α) на гомотетию γ с центром в точке O и коэффициентом k:

$$\alpha = \omega\gamma.$$

На основании п. 1 настоящего параграфа точка $M(x, y)$ при гомотетии γ перейдет в точку $M^*(x^*, y^*)$, такую, что

$$\left.\begin{aligned} x^* &= kx, \\ y^* &= ky. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Если подобное преобразование α первого рода, то и ортогональное преобразование ω первого рода. Оно точку $M^*(x^*, y^*)$ переведет в точку $M'(x', y')$, такую, что

$$\left.\begin{aligned} x' &= x^* \cos\varphi - y^* \sin\varphi + a, \\ y' &= x^* \sin\varphi + y^* \cos\varphi + b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(см. § 10). Здесь a и b — координаты образа O' точки O в преобразовании ω. Но так как гомотетия γ оставляет точку O на месте, то O' есть образ точки O в преобразовании $\alpha=\omega\gamma$; φ — угол от луча Ox до луча $O'x'$, в который переходит луч Ox при ортогональном преобразовании ω, а так как гомотетия γ переводит луч Ox в себя, то луч $O'x'$ будет образом луча Ox и в преобразовании $\alpha=\omega\gamma$.

Из формул (1) и (2) следует:

$$x' = k(x\cos\varphi - y\sin\varphi) + a,$$

$$y' = k(x\sin\varphi + y\cos\varphi) + b.$$

Если подобное преобразование α с коэффициентом k второго рода и $\alpha=\omega\gamma$, где γ — гомотетия с коэффициентом k относительно точки O, а ω — ортогональное преобразование (второго рода), то аналогично предыдущему (см. § 10) получим:

$$x' = k(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + a,$$

$$y' = k(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) + b,$$

где a и b — координаты образа O' точки O в преобразовании α, а φ — угол от луча Ox до его образа $O'x'$ в преобразовании α.

§ 19. ПОДОБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Подобные преобразования пространства определяются так же, как и в случае плоскости. При подобных преобразованиях пространства прямая переходит в прямую с сохранением порядка точек на прямой, плоскость переходит в плоскость, сохраняется параллельность прямых и плоскостей, сохраняются углы между прямыми и плоскостями и отношения длин любых двух отрезков.

Если A, B, C, D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости, и A', B', C', D' — такие четыре точки, что

$$A'B' = kAB, \quad A'C' = kAC, \quad A'D' = kAD,$$

$$B'C' = kBC, \quad B'D' = kBD, \quad C'D' = kCD,$$

где k — данное положительное число, то существует и притом только одно подобное преобразование, переводящее точки A, B, C, D соответственно в точки A', B', C', D'; это подобное преобразование имеет коэффициент k. Подобные преобразования пространства, как и в случае плоскости, делятся на преобразования первого и второго рода.

Если A, B, C — три произвольные точки пространства, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' — три такие точки, что $B'C' = kBC$, $C'A' = kCA$, $A'B' = kAB$, где k — данное положительное число, то существует и притом только одно подобное преобразование первого рода, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. Это подобное преобразование имеет коэффициент k. При тех же условиях существует и притом только одно подобное преобразование второго рода, которое точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B' и C'.

Множество всех подобных преобразований пространства образует группу. Множество всех ортогональных преобразований пространства образует подгруппу этой группы.

Гомотетия пространства определяется так же, как и гомотетия плоскости. Всякое подобное преобразование α с коэффициентом k может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования ω на гомотетию γ с центром в произвольной точке O пространства и коэффициентом k.

Всякое подобное преобразование α есть либо ортогональное преобразование, либо гомотетия, либо может быть пред-

ставлено в виде произведения гомотетии с центром в точке O на поворот вокруг оси, проходящей через точку O, если α — преобразование первого рода, либо в виде произведения гомотетии с центром в точке O на поворот вокруг оси, проходящей через точку O, и на симметрию относительно плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно оси поворота, если α — преобразование второго рода. Порядок, в котором производятся эти преобразования, безразличен, и представление α в виде указанного произведения преобразований можно осуществить лишь единственным образом.

Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат, то подобное преобразование α с коэффициентом k записывается в координатах следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x' &= k(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + a, \\ y' &= k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + b, \\ z' &= k(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + c, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства; $M'(x', y', z')$ — ее образ в подобном преобразовании α; k — коэффициент подобного преобразования; a, b, c — координаты образа O' точки O; a_{11}, a_{21}, a_{31} — косинусы углов луча $O'x'$, являющегося образом луча Ox, с лучами Ox, Oy, Oz и т. д.

В частности, гомотетия с коэффициентом k относительно начала координат записывается так:

$$x' = kx,$$

$$y' = ky,$$

$$z' = kz.$$

Применим аналитическое представление подобного преобразования для доказательства существования и единственности неподвижной точки при всяком подобном преобразовании с коэффициентом $k \neq 1$. В самом деле, полагая в формулах (1) $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, получим систему уравнений:

$$(a_{11}k - 1)x + a_{12}ky + a_{13}kz + a = 0,$$

$$a_{21}kx + (a_{22}k - 1)y + a_{23}kz + b = 0,$$

$$a_{31}kx + a_{32}ky + (a_{33}k - 1)z + c = 0.$$

Докажем, что определитель этой системы всегда отличен от нуля. В самом деле: предположим, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}k-1 & a_{12}k & a_{13}k \\ a_{21}k & a_{22}k-1 & a_{23}k \\ a_{31}k & a_{32}k & a_{33}k-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\frac{1}{k} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\frac{1}{k} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\frac{1}{k} \end{vmatrix} = 0.$$

Но это равенство невозможно, так как матрица ортогонального преобразования не может иметь собственных значений, не равных по модулю единице. Отсюда уже следует указанное выше представление подобного преобразования в виде произведения гомотетии на поворот вокруг оси, проходящей через центр гомотетии (в случае преобразования первого рода), и на поворот вокруг оси, проходящей через центр гомотетии, и симметрию относительно плоскости, перпендикулярной к этой оси и проходящей через центр гомотетии, в случае преобразования второго рода.

Это утверждение может быть доказано и без применения аналитического представления подобного преобразования (см., например, Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. II, Стереометрия. Учпедгиз, 1951, п. 624, стр. 470—472).

ГЛАВА IV

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В предыдущей главе мы рассмотрели простейшие геометрические преобразования, которые сохраняют форму любой геометрической фигуры. Совокупность подобных преобразований составляет подгруппу группы более общих преобразований, которые, сохраняя прямые линии и параллельность, меняют, вообще говоря, длины отрезков, величины углов и площадей фигур. Это — аффинные преобразования.

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ

Определение. *Взаимнооднозначное отображение плоскости π на плоскость π' называется аффинным, если при этом отображении всякие три точки, расположенные на одной прямой, переходят в три точки, также расположенные на одной прямой* *.

Теорема. *При аффинном отображении всякие три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Пусть α — аффинное отображение плоскости π на плоскость π'. Предположим, что в плоскости π найдутся три точки, P, Q, R, не лежащие на одной прямой, образы которых P', Q', R' лежат на одной прямой l'. Докажем, что тогда вся плоскость π отображается в некоторую прямую

* Как заметил проф. Ю. М. Смирнов, требование взаимной однозначности в определении аффинного отображения плоскости π на плоскость π' является излишним; оно вытекает из того, что плоскость π отображается на всю плоскость π' и сохранения прямолинейного расположения трех точек.

l' плоскости π'. Чтобы в этом убедиться, проведем через произвольную точку M плоскости π, не совпадающую с точками P, Q и R, прямую m, пересекающую прямые PQ и PR в двух разных точках A и B (рис. 45).

Точки P, A, Q лежат на одной прямой; следовательно, образ A' точки A лежит на прямой, проходящей через образы P' и Q' точек P и Q, т. е. на прямой l'. По аналогичной причине и образ B' точки B лежит на прямой l'. При этом в силу взаимной однозначности аффинного отображения точки A' и B' различны, ибо по условию различны их прообразы A и B. Но тогда образ M' точки M, лежащей на прямой AB, должен лежать на прямой $A'B'$, т. е. снова на прямой l'. Таким образом, каждая точка плоскости π должна отображаться в точку прямой l'. Но это противоречит определению аффинного отображения плоскости π на плоскость π', поскольку в этом определении требуется, чтобы образом плоскости была вся плоскость.

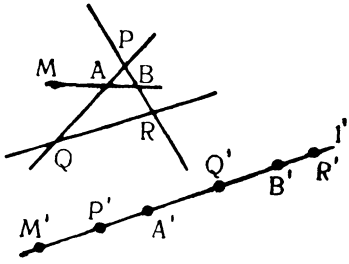


Рис. 45

Следствие. *Отображение, обратное к аффинному, является аффинным.*

Аффинное отображение плоскости π на ту же плоскость называется *аффинным преобразованием* этой плоскости. Рассмотренные в предыдущих главах ортогональные и подобные преобразования могут служить простейшими примерами аффинных преобразований. Из определения аффинного преобразования следует, что произведение двух аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование, а кроме того (см. следствие к только что доказанной теореме), преобразование, обратное к аффинному, является также аффинным. Таким образом, *совокупность всех аффинных преобразований плоскости образует группу.* Единичным преобразованием этой группы является тождественное преобразование.

Группа подобных преобразований плоскости составляет подгруппу группы ее аффинных преобразований.

Группа ортогональных преобразований плоскости также является подгруппой группы аффинных преобразований.

§ 21. ПРИМЕРЫ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

п. 1. Косая симметрия

При ортогональных преобразованиях сохраняются длины отрезков и углы между ними. При преобразовании подобия длины отрезков, вообще говоря, изменяются, но углы между ними сохраняются.

Простейшим примером аффинного преобразования плоскости, при котором меняются и длины, и углы, является косая симметрия.

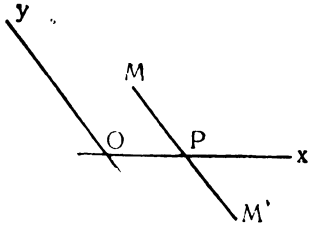


Рис. 46

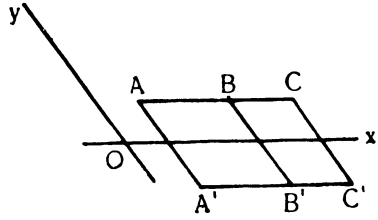


Рис. 47

Пусть даны две прямые Ox и Oy (рис. 46). Возьмем произвольную точку M. Проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy, и пусть эта прямая пересечет ось Ox в точке P. Продолжим отрезок MP за точку P на расстояние $PM' = MP$ и поставим в соответствие точке M точку M'. Каждой точке оси Ox поставим в соответствие самое эту точку. Такое соответствие есть преобразование, которое мы будем называть косой симметрией относительно прямой Ox по направлению оси Oy. Косая симметрия есть аффинное преобразование. В самом деле: это преобразование взаимнооднозначно и отображает плоскость π на себя. Возьмем в плоскости π три точки A, B, и C, лежащие на одной прямой. Если эта прямая параллельна оси Ox, то образы A', B', C' этих точек относительно прямой Ox лежат на прямой, параллельной Ox (рис. 47). Если же прямая, на которой лежат точки A, B и C, пересекает прямую Ox в точке P, то точки A', B' и C' лежат на прямой $A'P$ (рис. 48 и 49). Наконец, если точки A, B, и C лежат на прямой Oy или на прямой, ей параллельной, то на той же прямой лежат точки A', B' и C'. Если прямые Ox и Oy взаимно-перпендикулярны, то косая симметрия обращается в обычную симметрию относительно оси Ox.

Если принять прямые Ox и Oy за оси координат, то косая симметрия в координатах определится соотношениями:

$$x' = x, \quad y' = -y,$$

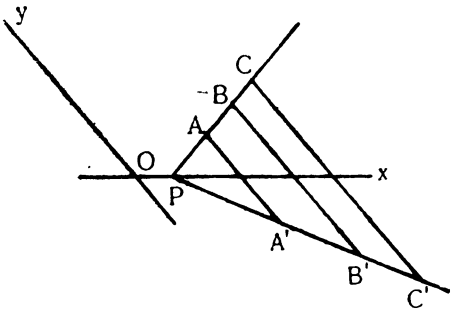


Рис. 48

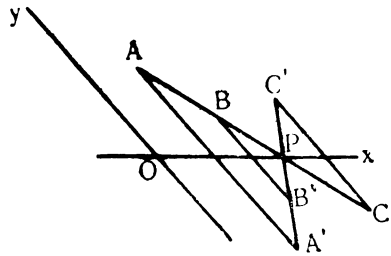


Рис. 49

где x и y — координаты произвольной точки M плоскости, а x' и y' — координаты ее образа M'.

п. 2. Сжатие

Пусть k — некоторое положительное число и l — данная прямая плоскости π. Возьмем произвольную точку M плоскости π, не лежащую на прямой l. Опустим из точки M перпендикуляр MP на прямую l (рис. 50). Возьмем на луче PM точку M' такую, что

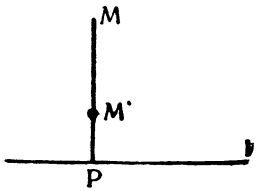


Рис. 50

$$\frac{M'P}{MP} = k.$$

Поставим точке M в соответствие точку M'; каждой же точке прямой l поставим в соответствие самое эту точку. Это соответствие есть преобразование плоскости π, называемое *преобразованием сжатия к прямой l (ось сжатия) с коэффициентом k.*

Если $k < 1$, то имеет место собственно сжатие, т. е. все точки приближаются к прямой l; если $k > 1$, то имеет место *растяжение,* т. е. все точки удаляются от прямой l. При $k = 1$ получаем тождественное преобразование, т. е. все точки остаются на месте.

Докажем, что сжатие к прямой есть аффинное преобразование. Для этого достаточно показать, что три любые точки A, B, C, расположенные на одной прямой, переходят в точки A', B', C', также расположенные на одной прямой. В самом деле: пусть A_0, B_0 и C_0 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, B, и C на прямую l. Тогда точки A', B' и C' лежат соответственно на лучах A_0A, B_0B, C_0C и

$$\frac{A'A_0}{AA_0} = \frac{B'B_0}{BB_0} = \frac{C'C_0}{CC_0} = k.$$

Из этих равенств следует, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

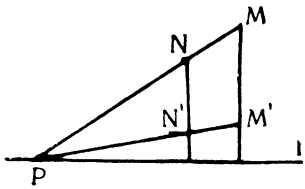


Рис. 51

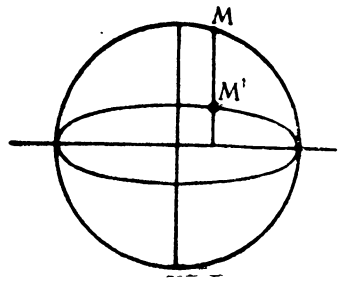


Рис. 52

Итак, сжатие к прямой есть аффинное преобразование.

Преобразование сжатия вполне определяется заданием оси сжатия и парой соответственных точек M и M', не лежащих на оси сжатия.

При этом построение образа N' любой точки N плоскости может быть осуществлено геометрически: пусть прямая MN (рис. 51) пересекает прямую l в точке P; соединяем точку P с точкой M' и проводим через точку N прямую, параллельную MM'; точка N' пересечения указанных прямых и есть образ точки N.

При сжатии плоскости к оси окружность переходит в эллипс. Эллипс часто и определяется, как образ окружности при сжатии плоскости к диаметру окружности. При этом отношение осей эллипса и является коэффициентом сжатия (рис. 52).

На рис. 53 изображена квадратная сеть и ее образ при сжатии к оси l с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

Если прямую l принять за ось Ox, а за ось Oy взять произвольную прямую, перпендикулярную прямой Ox, то в ко-

ординатах преобразование сжатия запишется так (рис. 54):

$$x' = x,$$

$$y' = ky,$$

где x и y — координаты произвольной точки M, k — коэффициент сжатия, а x' и y' — координаты образа M' точки M при сжатии к оси Ox с коэффициентом k.

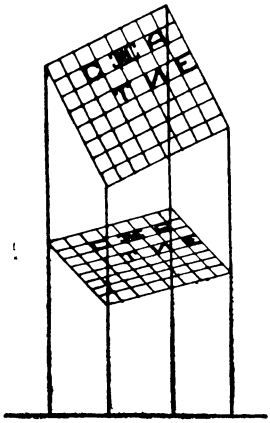


Рис. 53

Преобразование сжатия может быть с успехом применено к решению некоторых геометрических задач на построение. Рассмотрим, например, следующую задачу: на данной прямой p найти точку, сумма расстояний кото-

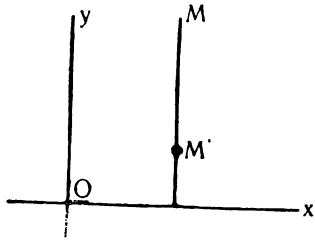


Рис. 54

рой до двух данных точек F_1 и F_2 равнялась бы данному отрезку $m (> F_1F_2)$.

Решение. Множество всех точек, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 равна данному отрезку, есть эллипс с фокусами F_1 и F_2, большая ось которого равна m. Пусть O — середина отрезка F_1F_2. На прямой F_1F_2 от точки O отложим отрезки

$$OA_1 = OA_2 = \frac{m}{2}.$$

Построим прямоугольный треугольник OB_1F_1, в котором $F_1B_1 = OA_1$. Тогда OB_1 — меньшая полуось эллипса с фокусами F_1, F_2 и большей осью A_1A_2.

Отложим на луче OB_1 отрезок $OB_1' = OA_1$.

Произведем «сжатие» плоскости к прямой A_1A_2 такое, чтобы точка B_1 перешла в точку B_1'. Тогда эллипс перейдет в окружность C' радиуса OA_1 с центром в точке O, а данная прямая p перейдет в некоторую прямую p' (рис. 55).

Пусть P' и Q' — точки, в которых прямая p' пересекает окружность C'. Проведем через точки P' и Q' прямые, параллельные прямой OB_1; точки P и Q пересечения этих прямых с прямой p и будут искомыми.

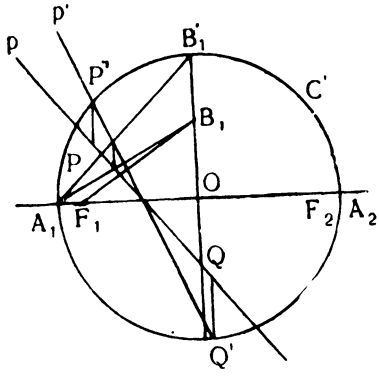


Рис. 55

п. 3. Косое сжатие

Пусть даны две прямые Ox и Oy (не обязательно взаимно-перпендикулярные) и число $k > 0$ (рис. 56). Проведем через точку M прямую, параллельную оси Oy, и обозначим через P точку ее пересечения с осью Ox. Поставим в соответствие каждой точке M точку M', лежащую на луче PM, проходящем через точку M параллельно оси Oy и такую, что

$$\frac{M'P}{MP} = k.$$

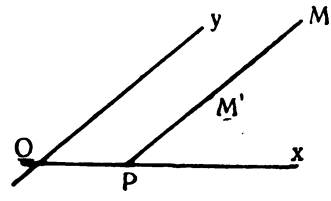


Рис. 56

Каждой точке оси Ox ставим в соответствие самое эту точку. Такое преобразование называется косым сжатием к оси Ox по направлению оси Oy.

Косое сжатие является аффинным преобразованием и определяется осью сжатия и парой соответственных точек.

В системе координат xOy косое сжатие определяется формулами:

$$x' = x,$$
$$y' = ky,$$

где x и y — координаты точки M, а x' и y' — координаты образа M' этой точки.

п. 4. Гиперболический поворот

Рассмотрим две пересекающиеся прямые Ox и Oy. Произведем косое сжатие к оси Ox по направлению оси Oy с коэффициентом k, а затем косое сжатие к оси Oy по направлению оси Ox, с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

В результате этих преобразований точка M плоскости перейдет в точку M'. Преобразование, равное произведению указанных сжатий, называется *гиперболическим поворотом.*

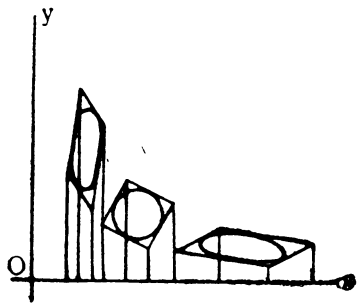


Рис. 57

Происхождение этого названия таково: если x и y — координаты точки M в системе xOy, а x' и y' — координаты точки образа M' точки M, то в силу определения гиперболического поворота:

$$x' = \frac{1}{k}x, \quad y' = ky,$$

откуда

$$x'y' = xy.$$

Поэтому если точка M (x, y) лежит на гиперболе

$$xy = C, \quad \text{или} \quad y = \frac{C}{x},$$

то образ ее M' лежит на той же гиперболе, так как $x'y' = xy$.

Так как гиперболический поворот есть произведение двух косых сжатий и так как косое сжатие к оси есть аффинное преобразование, то и гиперболический поворот есть аффинное преобразование.

На рис. 57 изображена окружность, вписанная в квадрат, и образ этой фигуры при гиперболических поворотах для $k = 2$ и $k = \frac{1}{2}$ (на рис. 57 оси Ox и Oy взаимно-перпендикулярны).

При гиперболическом повороте точки, лежащие на осях Ox и Oy, переходят соответственно в точки, лежащие на тех же осях. Точка O пересечения прямых Ox и Oy при гиперболическом повороте остается неподвижной.

При гиперболическом повороте сохраняются площади фигур, так как при сжатии к оси Ox площадь ее умножается на k, а при сжатии к оси Oy площадь умножается на $\frac{1}{k}$* (см. ниже, § 28).

Гиперболический поворот оказывается связанным с геометрией Лобачевского (см. Б. Н. Делонэ. Непротиворечивость геометрии Лобачевского).

Гиперболический поворот называется также лоренцевым преобразованием; преобразование этого вида встречается в теории относительности.

п. 5. Эллиптический поворот

Рассмотрим прямую l. Пусть M — произвольная точка плоскости. Произведем сжатие плоскости к прямой l с произвольным коэффициентом k; пусть при этом точка M перейдет в точку P. Повернем плоскость вокруг точки O, лежащей на прямой l, на данный угол φ; при этом точка P перейдет в точку P'. Наконец, снова произведем сжатие плоскости к прямой l, но уже с коэффициентом сжатия $\frac{1}{k}$; пусть точка P' перейдет при этом сжатии в точку M'. Если мы теперь точке M поставим в соответствие точку M', то получим преобразование, называемое эллиптическим поворотом (рис. 58).

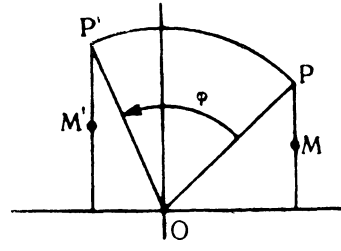


Рис. 58

Так как эллиптический поворот определяется как произведение аффинных преобразований, то это преобразование также аффинное.

Происхождение термина «эллиптический поворот» объясняется тем, что при этом преобразовании переходит в себя эллипс с центром в точке O, осями которого служит прямая l и прямая, проходящая через точку O перпендикулярно прямой l, причем отношение полуосей этого эллипса равно k.

В самом деле: пусть M — произвольная точка такого эллипса. После первого преобразования (сжатия к оси l с ко-

* Аффинные преобразования, сохраняющие площади, называются эквиаффинными. Таким образом, гиперболический поворот есть эквиаффинное преобразование.

эффициентом k) эллипс перейдет в окружность с центром в точке O. При втором преобразовании (поворот вокруг точки O) точка P указанной окружности переходит в точку P' той же окружности и, наконец, третье преобразование (сжатие к оси l с коэффициентом $\frac{1}{k}$) переведет точку P' окружности в точку M', лежащую на исходном эллипсе.

Эллиптический поворот вполне определяется заданием точки O, прямой l и парой соответственных точек M и M'. В самом деле, существует и притом только один эллипс K, проходящий через точки M и M', для которого точка O является центром, а прямая l (проходящая через точку O) — осью симметрии. Построим окружность C с центром в точке O, радиус которой равен полуоси эллипса, расположенной на прямой l. Пусть k — коэффициент сжатия к прямой l, преобразующего эллипс K в окружность C, а φ — угол между радиусами OP и OP' окружности C, где P и P' — соответственно образы точек M и M' при указанном сжатии. Таким образом, параметры k и φ, определяющие эллиптический поворот, переводящий точку M в точку M', найдены.

п. 6. Сдвиг

Введем на плоскости общую декартову систему координат xOy. Поставим в соответствие точке $M(x, y)$ точку $M'(x', y')$, координаты которой выражаются через координаты точки M следующими формулами:

$$x' = x + ky,$$

$$y' = y.$$

Геометрический смысл сдвига заключается в следующем: каждая точка M переходит в точку M', лежащую на прямой, параллельной оси Ox (все точки Ox остаются неподвижными). Далее: так как координаты вектора $\overrightarrow{MM'}$ равны $x' - x = ky$ и $y' - y = 0$, то модуль этого вектора равен $|k| \cdot |y|$, т. е. каждая точка M при сдвиге перемещается по прямой, параллельной оси Ox, на расстояние, пропорциональное расстоянию точки M до оси Ox, так как $|y|$ пропорционален этому расстоянию. Если $ky > 0$, то направление вектора $\overrightarrow{MM'}$ совпадает с положительным направлением оси Ox, а если $ky < 0$, то вектор $\overrightarrow{MM'}$ имеет направление, противоположное оси Ox.

Таким образом, при $k > 0$ точки, лежащие над осью Ox, сдвигаются вправо, а точки, лежащие под осью Ox, — влево; при $k < 0$ картина будет обратная.

Сдвиг определяется заданием оси Ox и парой соответственных точек. На рис. 59 дано построение точки N', соответствующей точке N в случае задания сдвига осью и парой соответствующих точек M и M'.

На рис. 60 изображены окружность, вписанная в квадрат, и ее образ при сдвиге.

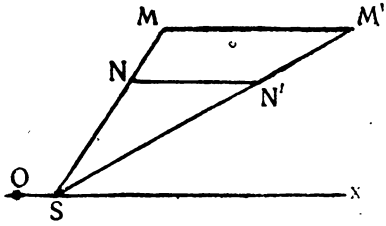


Рис. 59

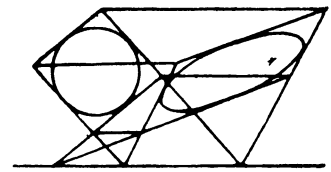


Рис. 60

Докажем, что сдвиг есть аффинное преобразование. Рассмотрим три точки A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3), лежащие на одной прямой, и пусть A' (x_1', y_1'), B' (x_2', y_2'), C' (x_3', y_3') их образы при рассматриваемом сдвиге. Тогда:

$$x_1' = x_1 + ky_1, \quad y_1' = y_1;$$

$$x_2' = x_2 + ky_2, \quad y_2' = y_2;$$

$$x_3' = x_3 + ky_3, \quad y_3' = y_3.$$

Так как точки A, B, C лежат на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

далее:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + ky_1 & y_1 & 1 \\ x_2 + ky_2 & y_2 & 1 \\ x_3 + ky_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, точки A', B' и C' также лежат на одной прямой.

Сдвиг есть эквиаффинное преобразование. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать сохранение при сдвиге площади треугольника.

Пусть $A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ — вершины треугольника; $A'\ (x_1', y_1')$, $B'\ (x_2', y_2')$, $C'\ (x_3', y_3')$ — их образы при сдвиге.

Тогда

$$\text{пл. } \triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 + ky_1 & y_1 & 1 \\ x_2 + ky_2 & y_2 & 1 \\ x_3 + ky_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \text{пл. } \triangle ABC.$$

п. 7. Параллельное проектирование. Родство

Очень важным видом аффинных отображений является параллельное проектирование, частным случаем которого является ортогональное проектирование, составляющее основу метода изображений пространственных фигур на плоскости. Метод ортогонального проектирования является основным в начертательной геометрии (метод Монжа).

Возьмем две плоскости π и π^* и какую-либо прямую p, не параллельную ни одной из этих плоскостей. Возьмем в плоскости π произвольную точку M и поставим ей в соответствие ту точку M^* плоскости π^*, в которой прямая, проходящая через точку M параллельно прямой p, пересекает плоскость π^*. Такое соответствие есть взаимнооднозначное отображение плоскости π на плоскость π^*, причем в этом соответствии образом прямой является прямая. Значит это соответствие есть аффинное отображение плоскости π на плоскость π^*. Это отображение и называется *параллельным проектированием плоскости π на плоскость π^* в направлении прямой p*. Если плоскости π и π^* параллельны, то параллельное проектирование есть ортогональное отображение плоскости π на плоскость π^*.

Отметим, что параллельная проекция окружности есть эллипс. Обратно: эллипс можно получить как параллельную

проекцию любой окружности, длина диаметра которой заключена между длинами осей эллипса. Если же это условие не выполнено, то рассматриваемый эллипс параллельным проектированием такой окружности получен быть не может.

Пусть плоскости π и π^* пересекаются по прямой l. Повернем плоскость π^* вокруг прямой l на такой угол, чтобы плоскость π^* совместилась с плоскостью π. Пусть M' — точка плоскости π, в которую при этом преобразовании поворота вокруг прямой l перейдет точка M^* плоскости π^*. Поставим в соответствие точке M плоскости π точку M' той же плоскости. Это соответствие есть аффинное преобразование плоскости π.

Это аффинное преобразование называется *родством*. В этом преобразовании образ каждой точки прямой l совпадает с самой этой точкой. Прямая l называется осью родства.

Теорема 1 *Всякое аффинное преобразование α плоскости, в котором все точки некоторой прямой l остаются неподвижными (т. е. каждая точка прямой l совпадает со своим образом), есть родство.*

Доказательство. Возьмем некоторую точку A, не лежащую на прямой l, и пусть A' — образ точки A в преобразовании α. Повернем плоскость π вокруг прямой l на произвольный угол и обозначим через A^* ту точку, в которую при этом преобразовании поворота β перейдет точка A'. Рассмотрим отображение проектирования плоскости π на плоскость π^* в направлении AA^* и поворот вокруг прямой l, совмещающий точку A^* с точкой A'. Результат последовательного выполнения проектирования и поворота есть родство ρ в плоскости π, которое точку A переводит в точку A'. Возьмем на прямой l две точки B и C. Родство ρ так же, как и аффинное преобразование α, точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B, C. Но, как будет показано ниже (§ 25), существует только одно аффинное преобразование, которое три данные точки, не лежащие на одной прямой, переводит в три точки, не лежащие на одной прямой. Следовательно, данное аффинное преобразование α и есть построенное нами родство ρ.

Таким образом, родство можно определить как такое аффинное преобразование плоскости, которое оставляет на месте все точки некоторой прямой.

Теорема 2. *Всякое родство ρ есть либо косое сжатие, либо косая симметрия, либо сдвиг, либо произведение косого сжатия относительно оси родства на косую симметрию относительно оси родства, причем косое сжатие и косая симметрия производятся в одном и том же направлении.*

Доказательство. Предположим, что в преобразовании родства ρ какая-нибудь точка A переходит в точку A', причем точки A и A' расположены по одну сторону от прямой l и прямая AA' пересекает ось родства. Косое сжатие σ к оси l, переводящее точку A в точку A', так же, как и родство ρ, оставляет на месте все точки прямой l. Но существует только одно аффинное преобразование, которое три данные точки, не лежащие на одной прямой, переводит в три точки, также не лежащие на одной прямой. Значит преобразования σ и ρ совпадают.

Тем же приемом доказывается, что если $AA' \parallel l$, то родство ρ есть сдвиг относительно l, переводящий A в A'; если точки A и A' лежат по разные стороны от прямой l и середина отрезка AA' лежит на прямой l, то родство ρ есть косая симметрия относительно прямой l в направлении прямой AA'; наконец, если точки A и A' лежат по разные стороны от прямой l и прямая l не проходит через середину отрезка AA', то родство ρ есть произведение симметрии относительно прямой l в направлении прямой AA' на косое сжатие к прямой l в направлении той же прямой AA' с коэффициентом $\frac{A'P}{AP}$, где P — точка пересечения прямой AA' с осью родства.

Преобразование родства с успехом было применено советским математиком Н. А. Глаголевым при исследовании некоторых теоретических вопросов начертательной геометрии (см. Н. А. Глаголев. Начертательная геометрия).

п. 8. Ортогональное проектирование

Пусть даны две не перпендикулярные друг к другу плоскости π и π^*. Поставим в соответствие каждой точке M плоскости π ее ортогональную проекцию M^* на плоскость π^*.

Такое отображение плоскости π на плоскость π^* является частным случаем параллельного проектирования и называется ортогональным проектированием.

Если плоскости π и π^* пересекаются, то родство, порождаемое ортогональным проектированием, есть сжатие к прямой l, по которой пересекаются эти плоскости, или сжатие с последующей симметрией относительно прямой l.

§ 22. СВОЙСТВА АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 1. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' образом всякой прямой l плоскости π служит прямая l' плоскости π'.*

Доказательство. Пусть l — прямая плоскости π. Возьмем на этой прямой две различные точки A и B и пусть A' и B' — их образы в плоскости π' при аффинном отображении α плоскости π на плоскость π'. Обозначим через l' прямую, проходящую через точки A' и B'. Образом любой точки C, лежащей на прямой l, будет точка C', лежащая на прямой l'. Следовательно, прямая l отображается *в прямую* l' (см. гл. I, § 2). Теперь возьмем на прямой l' произвольную точку C'. В силу того, что отображение, обратное к аффинному, является аффинным, прообразом точки C' прямой l' в преобразовании α будет точка C, лежащая на прямой l. Таким образом, прямая l отображается *на прямую* l'.

Теорема 2. *При аффинном отображении α плоскости π на плоскость π' параллельные прямые плоскости π переходят в параллельные прямые плоскости π'. Пересекающиеся прямые плоскости π переходят в пересекающиеся прямые плоскости π'. При этом точка пересечения прямых плоскости π переходит в точку пересечения образов этих прямых.*

Доказательство. Пусть a и b — две параллельные прямые плоскости π; по доказанному их образами будут прямые a' и b' плоскости π'; докажем, что прямые a' и b' параллельны. В самом деле: если бы прямые a' и b' имели общую точку M', то прообраз M точки M' должен был бы лежать как на прямой a, так и на прямой b, что невозможно, ибо прямые a и b не имеют ни одной общей точки.

Пусть теперь a и b — пересекающиеся прямые плоскости π; M — точка их пересечения. Образ M' точки M должен лежать как на прямой a', являющейся образом a, так и на прямой b', являющейся образом b; следовательно, прямые a' и b' пересекаются в точке M'.

В теории ортогональных отображений после аналогичных теорем следовали теоремы, утверждающие, что отрезок переходит в отрезок и что отношение, в котором точка делит отрезок, не меняется.

Хотя и при аффинном отображении, как это будет ниже показано, отрезок переходит в отрезок (правда, уже, быть может, другой длины), а отношение, в котором точка делит отрезок, остается неизменным, однако тут доказательство этих двух утверждений вовсе не просто. Долгое время даже считалось, что указанные свойства вовсе не следуют из данного в начале этой главы определения аффинного отображения и что обеспечить выполнение этих свойств можно лишь внеся в определение аффинного отображения дополнительные требования, например, требование непрерывности ото-

бражения либо требование сохранения порядка троек точек на прямой (т. е. что если B лежит на прямой между A и C, то B' лежит между A' и C'). Так думали создатели теории проективных и аффинных отображений Понселе, Мебиус, Шаль и другие; лишь в 1880 г. французский геометр Дарбу обнаружил, что указанные дополнительные требования, а вместе с ними и леммы о переходе отрезка в отрезок и о сохранении отношения, в котором точка делит отрезок, на самом деле являются уже следствиями требований, включенных в данное выше определение аффинного отображения.

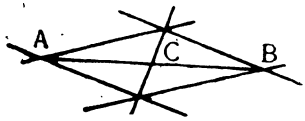


Рис. 61

В статье «Основная теорема проективной геометрии» (Mathematische Annalen, т. XVII, 1880, стр. 55—61) Дарбу доказывает сохранение двойного отношения при проективном отображении, фактически сводя дело к доказательству сохранения простого отношения при аффинном отображении.

Прежде чем переходить к изложению этих вопросов, докажем одну теорему, которая непосредственно вытекает из определения аффинного отображения.

Теорема 3. *При аффинном отображении середина отрезка, соединяющего точки A и B, переходит в середину отрезка, соединяющего их образы A' и B'.*

Доказательство. Проведем через точку A две прямые, а через точку B прямые, им параллельные (рис. 61). Эти четыре прямые образуют параллелограмм. Середина C отрезка AB будет точкой пересечения диагоналей этого параллелограмма. В силу теорем 1 и 2 после отображения мы снова получим параллелограмм, причем образ C' точки C будет лежать на пересечении диагоналей полученного параллелограмма и, следовательно, точка C' есть середина отрезка $A'B'$.

Следствие. *Если точки $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$ делят отрезок AB на n равных частей, то их образы $D_1', D_2', \ldots, D_{n-1}'$ при аффинном отображении делят отрезок $A'B'$ (A' и B' — образы точек A и B) также на n равных частей.*

В самом деле: так как $AD_1 = D_1D_2 = \ldots = D_{n-1}B$, то точка D_1 является серединой отрезка AD_2; поэтому точка D_1' является серединой отрезка $A'D_2'$, т. е. $A'D_1' = D_1'D_2'$, и т. д.

§ 23. ЛЕММА ДАРБУ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Лемма Дарбу. *При аффинном отображении всякая точка C, лежащая на отрезке AB (т. е. между точками A и B), пе-*

реходит в некоторую точку C', лежащую на отрезке $A'B'$ (т. е. между образами A' и B' точек A и B).

Доказательство. Достаточно доказать, что при аффинном отображении всякая точка C прямой AB, внешняя к отрезку AB, переходит в точку C', внешнюю к отрезку $A'B'$; действительно, если бы тогда внутренняя точка переходила во внешнюю, то при обратном отображении (также являющемся аффинным) получилось бы, что внешняя точка переходит во внутреннюю. Итак, пусть A и B—две произвольные точки плоскости π, а C—какая-нибудь точка, лежащая на прямой AB вне отрезка AB. Так как векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ имеют противоположное направление, то их отношение отрицательно, и мы можем положить

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\lambda^2.$$

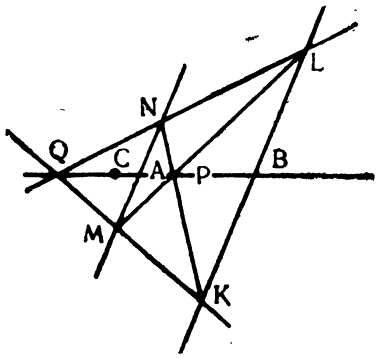


Рис. 62

Построим на прямой AB две точки P и Q, одну — между точками A и B, другую — вне отрезка AB так, чтобы

$$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = \lambda, \quad \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QB}} = -\lambda.$$

Тогда точка C будет серединой отрезка PQ *.

Проведем через точки A и B две параллельные прямые и отложим на каждой из них по обе стороны от точек A и B равные отрезки (рис. 62):

$$BL = BK, \quad AN = AM$$

---

* В самом деле: докажем это, применяя метод координат. Примем прямую AB за ось Ox и пусть x_1 и x_2 абсциссы точек A и B Так как точка P делит отрезок AB в отношении λ, а точка Q делит отрезок AB в отношении $-\lambda$, то абсциссы x_P и x_Q точек P и Q будут:

$$x_P = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad x_Q = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}.$$

Середина C^* отрезка PQ имеет абсциссу

$$x = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}\right) = \frac{x_1 - \lambda^2 x_2}{1 - \lambda^2},$$

т. е. точка C^* делит отрезок AB внешним образом в отношении $-\lambda^2$ и значит совпадает с C.

такие, что их отношение равно λ

$$\frac{AN}{BL} = \lambda.$$

Тогда прямые NK и LM пересекутся в точке P, а прямые LN и MK пересекутся в точке Q.

После аффинного отображения параллельные прямые перейдут в параллельные, середины отрезков — в середины соответствующих отрезков и сохранится прямолинейное расположение точек. Таким образом, построенная фигура сохранит свой вид и после аффинного отображения. При этом если одна из точек, P' или Q', будет внутренней по отношению к отрезку $A'B'$, то другая — внешней * .

Пусть, например, Q' — внутренняя точка; тогда P' — внешняя, и мы имеем

$$\frac{\overrightarrow{A'P'}}{\overrightarrow{P'B'}} = -\lambda', \quad \frac{\overrightarrow{A'Q'}}{\overrightarrow{Q'B'}} = \lambda'.$$

Но так как точка C' есть середина отрезка $P'Q'$, то она делит отрезок $P'Q'$ внешним образом в отношении $-\lambda'^2$ и, следовательно, лежит вне отрезка $P'Q'$.

Следствие 1. *При аффинном отображении образом отрезка является отрезок.*

Действительно, по доказанному, образ C' каждой точки C отрезка AB лежит на отрезке $A'B'$, где A' и B' — образы точек A и B. Но так как отображение, обратное к афинному, есть также аффинное, то прообраз C каждой точки C' отрезка $A'B'$ лежит на отрезке AB. Тем самым отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

Следствие 2. *При аффинном отображении внутренние точки треугольника (или параллелограмма) переходят во внутренние точки образа этого треугольника (соответственно параллелограмма).*

В самом деле: пусть точка M лежит внутри треугольника ABC; тогда прямая AM пересекает сторону BC в точке D, лежащей между B и C; при этом точка M лежит между точками A и D. После аффинного отображения точка D перейдет в точку D', лежащую между B' и C', а точка M в точку M', лежащую между A' и D', следовательно, в точку, лежащую внутри треугольника $A'B'C'$.

---

* В дальнейшем мы нигде не пользуемся тем, что внутренней будет непременно точка P', а внешней — точка Q'; для нас важно лишь то, что одна из этих точек внутренняя для отрезка $A'B'$, а другая — внешняя.

Отсюда также следует, что всякое ограниченное множество при аффинном отображении переходит в ограниченное множество. В самом деле: если множество ограничено, то существует треугольник, для которого все точки этого множества являются внутренними. Но тогда, по доказанному, образ этого множества будет состоять из внутренних точек треугольника, являющегося образом треугольника, указанного выше, и, следовательно, также является ограниченным множеством.

§ 24. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРОСТОГО ОТНОШЕНИЯ ПРИ АФФИННОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Теорема. *При аффинном отображении α точка C, делящая отрезок AB (внутренним или внешним образом) в отношении λ, переходит в точку C', делящую отрезок $A'B'$, соединяющий образы A' и B' точек A и B, в том же отношении λ.*

Коротко эту теорему формулируют так: простое отношение есть инвариант аффинного отображения.

Доказательство. Докажем теорему для того случая, когда точка C лежит между точками A и B. Предположим сначала, что отношение

$$\lambda = \frac{AC}{CB}$$

есть число рациональное. Пусть

$$\lambda = \frac{p}{q},$$

где p и q — целые положительные числа. Разделим отрезок AB точками $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{p+q-1}$ на $p+q$ равных частей. Так как $AC : CB = p : q$, то точка D_p совпадает с точкой C. Пусть $D_1', D_2', D_3', \ldots, D'_{p+q-1}$ — образы точек $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{p+q-1}$ в отображении α. В силу следствия из теоремы 3 предыдущего параграфа

$$A'D_1' = D_1'D_2' = \ldots = D'_{p-1}D'_p = D'_pD'_{p+1} = \ldots D'_{p+q-1}B',$$

значит

$$\frac{A'D'_p}{D'_pB'} = \frac{p}{q}.$$

Точка D_p совпадает с точкой C, поэтому ее образ D'_p сов-

падает с точкой C', являющейся образом точки C, и мы имеем

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{p}{q} = \frac{AC}{CB}.$$

Теперь предположим, что отношение

$$\lambda = \frac{AC}{CB}$$

иррационально. Допустим, например (рис. 63), что

$$\frac{A'C'}{C'B'} > \frac{AC}{CB}.$$

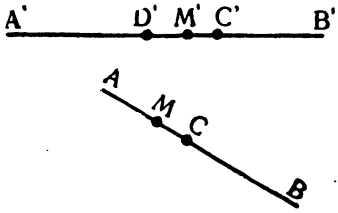


Рис. 63

Возьмем на отрезке $A'B'$ точку D' такую, что

$$\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB};$$

точка D' не совпадает с точкой C'. Разделим отрезок $A'B'$ на n равных частей и выберем n столь большим, что хотя бы одна точка M' деления попала между точками C' и D'. Тогда прообраз M точки M' лежит между точками A и C. По предыдущему:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'};$$

с другой стороны:

$$\frac{AM}{MB} < \frac{AC}{CB}$$

и

$$\frac{A'M'}{M'B'} > \frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB},$$

откуда

$$\frac{AC}{CB} < \frac{AM}{MB},$$

и мы пришли к противоречию.

Если точка C лежит вне отрезка AB и, например, точка B лежит между точками A и C, то и точка B' лежит между точками A' и C', и по доказанному

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

откуда

$$\frac{AB}{BC}+1=\frac{A'B'}{B'C'}+1,$$

$$\frac{AB+BC}{BC}=\frac{A'B'+B'C'}{B'C'},$$

$$\frac{AC}{CB}=\frac{A'C'}{C'B'}.$$

Так как точка C лежит вне отрезка AB, а точка C' вне отрезка $A'B'$, то

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}<0 \text{ и } \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}<0.$$

Таким образом, мы доказали, что отношения

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \text{ и } \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}$$

равны по абсолютной величине и имеют один и тот же знак, поэтому

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}.$$

§ 25. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА АФФИННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема. *Пусть A, B и C — три произвольные точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, а A', B', C' — три произвольные точки плоскости π', также не лежащие на одной прямой. Тогда существует и притом только одно аффинное отображение плоскости π на плоскость π', которое точки A, B и C переводит соответственно в точки A', B' и C'.*

Доказательство. Введем на плоскости аффинную систему координат, принимая за начало координат точку C, за оси x и y прямые CA и CB, а за масштабные отрезки этих осей соответственно отрезки CA и CB. Аналогично введем аффинную систему координат в плоскости π' (C' — начало координат, $C'A'$ — ось x', $C'B'$ — ось y', $C'A'$ и $C'B'$ — масштабные отрезки осей x' и y').

Построим отображение плоскости π на плоскость π' следующим образом: пусть M — произвольная точка плоскости

π, x и y — ее координаты относительно введенной на плоскости π системы координат. Поставим в соответствие точке M точку M' плоскости π', имеющую во введенной на плоскости π' системе координат те же координаты x и y. Это соответствие взаимнооднозначно.

Докажем, что в этом соответствии трем точкам P, Q, R плоскости π, лежащим на одной прямой, в плоскости π' соответствуют точки P', Q', R', также лежащие на одной прямой. В самом деле: пусть $Ax+By+C=0$ уравнение прямой, на которой лежат точки P, Q, R; тогда координаты точек P, Q, R удовлетворяют этому уравнению. Но точки P', Q', R' имеют соответственно те же координаты, как и точки P, Q и R, значит их координаты удовлетворяют тому же уравнению первой степени $Ax+By+C=0$, значит эти три точки P', Q', R' лежат на одной прямой плоскости π'.

Итак, построенное отображение α является аффинным. Это отображение точки C (0,0), A (1,0), B (0,1) плоскости π переводит в точки C' (0,0), A' (1,0), B' (0,1) плоскости π'.

Докажем, что всякое аффинное отображение β плоскости π на плоскость π', которое точки A, B и C переводит в точки A', B', C', совпадает с отображением α, построенным выше. В самом деле: пусть M (x, y) — произвольная точка плоскости π. Проведем через точку M прямые, параллельные прямым CB и CA, и обозначим через P и Q точки пересечения этих прямых с прямыми CA и CB. Координаты точки M будут выражаться соотношениями:

$$x=\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CA}},\quad y=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Пусть P' и Q' — образы точек P и Q в аффинном отображении β. На основании инвариантности отношения направленных отрезков при аффинном отображении (§ 24) имеем:

$$\frac{\overrightarrow{C'P'}}{\overrightarrow{C'A'}}=\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CA}}=x,\ \frac{\overrightarrow{C'Q'}}{\overrightarrow{C'B'}}=\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{CB}}=y.$$

В силу сохранения параллельности при аффинном отображении имеем $M'P' \parallel C'B'$ и $M'Q' \parallel C'A'$; отсюда и из соотношений:

$$\frac{\overrightarrow{C'P'}}{\overrightarrow{C'A'}}=x,\quad \frac{\overrightarrow{C'Q'}}{\overrightarrow{C'B'}}=y$$

следует, что точка M' имеет координаты x и y. Таким образом, отображение β переводит точку M плоскости π в ту же точку M' плоскости π', что и отображение α. Этим доказана единственность аффинного отображения, переводящего точки A, B, и C плоскости π в точки A', B', C' плоскости π'.

Следствие. *Если при аффинном преобразовании α три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, остаются неподвижными, то преобразование α является тождественным.*

В самом деле: пусть α — аффинное преобразование, переводящее точки A, B и C соответственно в точки A, B и C. Тождественное преобразование так же, как и преобразование α,

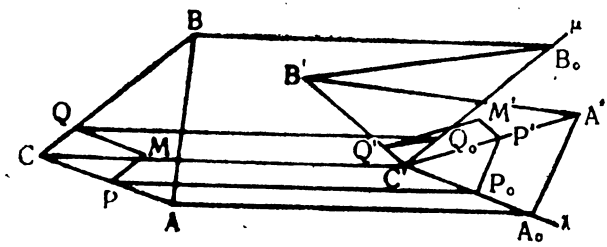


Рис. 64

точки A, B и C оставляет на месте, а потому в силу единственности аффинного преобразования, определяемого тремя парами соответственных точек, аффинное преобразование α является тождественным.

Из доказанной теоремы вытекает также способ построения образа M' любой точки M плоскости при аффинном преобразовании, заданном двумя тройками соответственных точек: A, B, C и A', B', C'; проведем через точку M прямые MP и MQ, параллельные прямым CB и CA. Через точку C' проведем прямые λ и μ, параллельные прямым CA и CB, а через точки A, P, Q, B — прямые AA_0, PP_0, QQ_0, BB_0, параллельные CC' (точки A_0 и P_0 лежат на прямой λ, а точки B_0 и Q_0 — на прямой μ) (рис. 64). Через точки P_0 и Q_0 проводим прямые: P_0P', параллельную A_0A', и Q_0Q', параллельную B_0B'. Наконец, через точки P' и Q' проводим прямые, соответственно параллельные прямым $C'B'$ и $C'A'$. Точка M' пересечения этих последних прямых и будет образом точки M при аффинном преобразовании плоскости, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C', так как точка M' имеет те же координаты по отношению к системе координат с началом в точке C' и масштабными отрезками $C'A'$ и $C'B'$,

что и точка M в системе координат с началом в C и масштабными отрезками CA и CB.

Отметим, что указанное построение требует лишь проведения прямых через две данные точки и прямых, параллельных данным.

§ 26. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО АФФИННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лемма 1. *Всякое аффинное преобразование плоскости может быть представлено в виде произведения подобного преобразования на родство (напомним, что родство есть такое аффинное преобразование плоскости, при котором каждая точка некоторой прямой совпадает со своим образом).*

Доказательство. Пусть A, B и C — три точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, A', B', C' — их образы при рассматриваемом аффинном преобразовании α. Пусть C^* — такая точка плоскости π, что $\triangle ABC^* \backsim \triangle A'B'C'$. Рассмотрим родство ρ с осью AB, которое точку C переводит в точку C^*, и подобие σ, которое точки A, B, C^* переводит соответственно в точки A', B', C'. Тогда произведение $\sigma\rho$ так же, как и преобразование α, переводит точки A, B и C соответственно в точки A', B' и C'; но существует только одно аффинное преобразование, которое три данные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переводит в три данные точки A', B' и C', также не лежащие на одной прямой (см. § 25); поэтому $\alpha = \sigma\rho$.

Лемма 2. *Для всякого родства ρ плоскости π можно найти две такие взаимно-перпендикулярные прямые, образами которых являются также взаимно-перпендикулярные прямые.*

Доказательство. Если родство ρ есть тождественное преобразование, то условию леммы удовлетворяет любая пара взаимно-перпендикулярных прямых.

Если родство ρ есть сжатие к прямой l, или симметрия относительно l, или произведение этих преобразований, то условию леммы удовлетворяет прямая l и любая к ней перпендикулярная.

Пусть, наконец, родство ρ не есть ни тождественное преобразование, ни сжатие, ни симметрия, ни произведение сжатия на симметрию; пусть l — ось родства, A — любая точка, не лежащая на оси родства, а A' — ее образ в родстве ρ. Обозначим через O точку пересечения прямой l с перпендикуляром к прямой AA' в середине отрезка AA' (рис. 65). Построим окружность с центром в точке O, проходящую через

точки A и A'; пусть эта окружность пересекает прямую l в точках P и Q; так как точки P и Q неподвижны в родстве ρ, то прямые AP и AQ перейдут соответственно в прямые $A'P$ и $A'Q$; но так как PQ диаметр окружности, на которой лежат точки A и A', то прямые AP и AQ взаимно-перпендикулярны, так же как и их образы $A'P$ и $A'Q$.

Теорема. *Всякое аффинное преобразование плоскости есть произведение двух сжатий к двум взаимно-перпендикулярным прямым на некоторое ортогональное преобразование.*

Доказательство. Пусть α — произвольное аффинное преобразование. На основании леммы 1 его можно представить в виде произведения подобного преобразования σ на родство ρ:

$$\alpha = \sigma\rho.$$

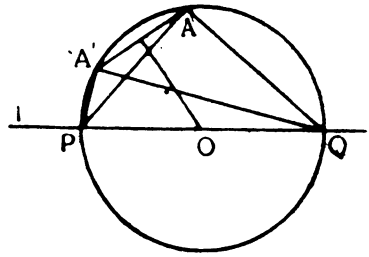


Рис. 65

На основании леммы 2 существуют две такие взаимно-перпендикулярные прямые, которые в родстве ρ переходят также во взаимно-перпендикулярные прямые. Так как при преобразовании подобия взаимно-перпендикулярные прямые переходят во взаимно-перпендикулярные прямые, то из сказанного следует, что найдутся такие взаимно-перпендикулярные прямые Ox и Oy, которые рассматриваемым аффинным преобразованием $\alpha=\sigma\rho$ переводятся во взаимно-перпендикулярные прямые $O'x'$ и $O'y'$.

Возьмем на прямых Ox и Oy соответственно точки A и B; пусть A' и B' — образы этих точек в аффинном преобразовании α. Рассмотрим ортогональное преобразование ω, которое точку O переводит в точку O', точку A — в точку A^* луча $O'A'$ прямой $O'x'$, а точку B — в точку B^* луча $O'B'$ прямой $O'y'$. Произведем два сжатия: одно ξ_1 к прямой $O'x'$, которое точку B^* переводит в точку B', второе ξ_2 к прямой $O'y'$, которое точку A^* переводит в точку A'. Преобразование $\xi_1\xi_2\omega$ так же, как и преобразование α, переводит точки O, A и B соответственно в точки O', A' и B'. Но существует только одно аффинное преобразование, которое три точки O, A и B переводит в точки O', A' и B' (§ 25); следовательно,

$$\alpha = \xi_1\xi_2\omega.$$

Следствие 1. *Всякое аффинное отображение α плоскости π на плоскость π' сводится к последовательному выполнению*

ортогонального отображения плоскости π на плоскость π' и двум сжатиям к двум взаимно-перпендикулярным прямым в плоскости π'.

В самом деле: пусть A, B и C — три точки плоскости π, не лежащие на одной прямой, A', B', C' — их образы в отображении α. Пусть ω — ортогональное отображение плоскости π на плоскость π'; A^*, B^*, C^* — образы точек A, B и C в этом отображении. Пусть β — аффинное преобразование плоскости π', переводящее точки A^*, B^*, C^* соответственно в точки A', B', C'. На основании только что доказанной теоремы преобразование β может быть сведено к последовательному выполнению ортогонального преобразования ω^* и двух сжатий ξ_1 и ξ_2 к двум взаимно-перпендикулярным прямым. Обозначим через A^{**}, B^{**}, C^{**} образы точек A^*, B^* и C^* в преобразовании ω^*. Последовательное выполнение ортогонального отображения ω плоскости π на плоскость π' и следующего за ним ортогонального преобразования ω^* плоскости π' может быть заменено одним ортогональным отображением Ω, переводящим точки A, B и C плоскости π в точки A^{**}, B^{**}, C^{**} плоскости π'. Отсюда в свою очередь следует, что аффинное отображение α плоскости π на плоскость π' сводится к последовательному выполнению ортогонального отображения Ω, переводящего точки A, B, C плоскости π в точки A^{**}, B^{**}, C^{**} плоскости π', и двум сжатиям к двум взаимно-перпендикулярным прямым в плоскости π', переводящим точки A^{**}, B^{**}, C^{**} в точки A', B', C'.

Следствие 2. *Всякое аффинное преобразование можно представить как произведение одного сжатия к прямой на подобное преобразование.*

В самом деле: как мы показали, всякое аффинное преобразование есть результат последовательного проведения ортогонального преобразования ω и двух сжатий ξ_1 и ξ_2 к прямым $O'x'$ и $O'y'$ с коэффициентами $k_1 = \frac{O'B'}{O'B^*}$ и $k_2 = \frac{O'A'}{O'A^*}$.

Два сжатия к взаимно-перпендикулярным прямым $O'x'$ и $O'y'$ с коэффициентами k_1 и k_2 можно заменить гомотетией γ с центром в точке O' и коэффициентом k_2 и затем сжатием к прямой $O'x'$ с коэффициентом $\frac{k_1}{k_2}$. Но произведение $\gamma\omega$ гомотетии γ на ортогональное преобразование ω есть преобразование подобия.

§ 27. ИЗМЕНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ПРИ АФФИННОМ ОТОБРАЖЕНИИ

При аффинном отображении плоскости на плоскость длины отрезков, вообще говоря, изменяются, и притом в разных направлениях по-разному.

Следствие 1 предыдущего параграфа дает возможность указать границы этого изменения. А именно: отношение, в котором изменяются при аффинном отображении отрезки, заключено в интервале от наименьшего до наибольшего из коэффициентов k_1 и k_2 сжатия этого аффинного отображения.

Предположим, что $k_1 \leqslant k_2$. Пусть AB — какой-нибудь отрезок плоскости π, а $A'B'$ — его образ в плоскости π' при аффинном отображении α. Нам нужно доказать, что

$$k_1 \leqslant \frac{A'B'}{AB} \leqslant k_2. \qquad (1)$$

Пусть Ox и Oy — две взаимно-перпендикулярные прямые в плоскости π, переходящие при аффинном отображении α также во взаимно-перпендикулярные прямые $O'x'$ и $O'y'$ плоскости π'. Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты концов A и B отрезка AB в системе xOy; тогда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

Концы A' и B' образа $A'B'$ отрезка AB будут иметь относительно прямоугольной системы координат $x'O'y'$ (с той же единицей масштаба по осям координат, как и в системе xOy) следующие координаты:

$$x'_1 = k_1 x_1, \quad x'_2 = k_1 x_2,$$

$$y'_1 = k_2 y_1; \quad y'_2 = k_2 y_2,$$

так что

$$A'B' = \sqrt{k_1^2 (x_2 - x_1)^2 + k_2^2 (y_2 - y_1)^2}. \qquad (3)$$

Сравнение формул (2) и (3) приводит к неравенствам (1).

§ 28. ИЗМЕНЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПРИ АФФИННОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПЛОСКОСТИ НА ПЛОСКОСТЬ

Теорема. *При аффинном отображении плоскости на плоскость все площади изменяются в одном и том же отношении, а именно умножаются на произведение $k_1 k_2$ коэффициентов сжатий этого отображения.*

Доказательство. При ортогональном отображении площадь фигуры не меняется, поэтому достаточно доказать, что если k — коэффициент сжатия к прямой l, s — площадь фигуры F и s' — площадь фигуры F', являющейся образом фигуры F при сжатии к прямой l с коэффициентом k, то

$$s' = ks.$$

Покроем фигуру F сетью квадратов, стороны которых параллельны оси сжатия Ox и перпендикулярной к ней прямой Oy. После сжатия к оси Ox фигура F перейдет в фигуру F', а квадратная сеть перейдет в сеть прямоугольников, стороны которых по-прежнему параллельны прямым Ox и Oy. Число прямоугольников, покрывающих фигуру F', равно числу квадратов, покрывающих фигуру F, но площадь прямоугольника сети равна площади квадрата сети, умноженной на k. Отсюда следует, что сумма площадей прямоугольников, покрывающих фигуру F', равна сумме площадей квадратов, покрывающих фигуру F, умноженной на k. Отсюда предельным переходом получается формула $s'=ks$.

§ 29. ПРИМЕНЕНИЕ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ СВОЙСТВ ЭЛЛИПСА

Для установления некоторых свойств фигур часто бывает полезно подвергнуть эту фигуру аффинному преобразованию, изучить преобразованную фигуру и уже из свойств преобразованной фигуры вывести свойства исходной.

В настоящем параграфе мы применим этот метод к выяснению некоторых геометрических свойств эллипса.

Эллипс K можно определить как образ окружности при сжатии плоскости, в которой расположена окружность, к ее диаметру. Из этого определения эллипса следует, что эллипс есть ортогональная проекция окружности, а именно: эллипс с полуосями a и b $(a>b)$ есть ортогональная проекция окружности радиуса a, плоскость которой наклонена к плоскости эллипса под углом $\varphi=\arccos\frac{b}{a}$.

В самом деле: сжатие плоскости к прямой с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}<1$ можно осуществить геометрически следующим образом: повернуть плоскость в пространстве вокруг оси сжатия l на угол $\varphi=\arccos\frac{b}{a}$ и затем спроектировать ортогонально все точки повернутой плоскости на ее исходное

положение. Пусть M — произвольная точка исходной плоскости и пусть после поворота исходной плоскости вокруг прямой l на угол $\varphi = \arccos\frac{b}{a}$ эта точка перейдет в точку M^*, а после проектирования точка M^* спроектируется в точку M' исходной плоскости. Тогда точки M и M' будут находиться на одном перпендикуляре к прямой l. Пусть d — расстояние от точки M до прямой l; тогда расстояние d' от точки M' до прямой l будет равно: $d' = d\cos\varphi = d\frac{b}{a}$ так что $\frac{d'}{d} = \frac{b}{a}$. Поэтому окружность радиуса a, диаметр которой лежит на прямой l и которая лежит в повернутой плоскости, перейдет после проектирования в эллипс с полуосями a и b, большая ось которого будет лежать на прямой l (рис. 66).

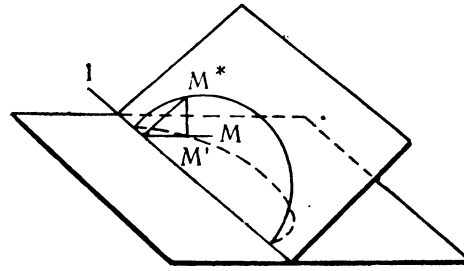


Рис. 66

Теорема 1. *Всякий эллипс имеет центр симметрии и притом только один.*

Доказательство. Центр окружности C есть центр симметрии. Так как сжатие есть аффинное преобразование, то, в силу того, что при аффинном преобразовании середина каждого отрезка переходит в середину образа этого отрезка (теорема 3, § 22), заключаем, что центр окружности преобразуется в центр симметрии эллипса K, получающегося сжатием окружности C. Если бы у эллипса K был еще один центр симметрии, то, в силу того, что преобразование, обратное сжатию, есть также сжатие, следовательно, аффинное преобразование, заключаем, что и у окружности был бы еще один центр симметрии, отличный от ее центра. Но это невозможно, так как тогда диаметр окружности, проходящей через второй центр симметрии, должен был бы иметь две разные середины.

Заметим, что вообще ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

Теорема 2. *Геометрическое место середин параллельных хорд эллипса есть хорда эллипса, проходящая через его центр.*

Доказательство. Рассмотрим окружность C, из которой эллипс K получен некоторым сжатием к диаметру окружности.

Так как при всяком аффинном преобразовании, в частности при сжатии, переводящем эллипс K в окружность C, параллельные прямые переходят в параллельные, а середины отрезков снова в середины отрезков, то рассматриваемым параллельным хордам эллипса будут соответствовать параллельные хорды окружности, а их серединам — середины этих хорд окружности. Но середины параллельных хорд окружности образуют диаметр окружности, перпендикулярный к этим хордам, т. е. хорду, проходящую через ее центр. Поэтому и середины параллельных хорд эллипса образуют хорду эллипса, проходящую через его центр.

Замечание. Справедлива и обратная теорема: *замкнутая выпуклая линия, для которой середины параллельных хорд любого направления лежат на одной прямой, есть эллипс.*

Доказательство этой теоремы довольно трудно, и мы его приводить не будем.

Прямую, содержащую геометрическое место середин параллельных хорд эллипса, называют диаметром эллипса, сопряженным к хордам этого направления.

Мы уже доказали, что *все диаметры эллипса проходят через его центр.* Верно и обратное положение: *любая прямая, проходящая через центр эллипса, есть диаметр эллипса.*

Действительно, она получается из некоторого диаметра окружности и значит является прямой, на которой расположены середины тех параллельных хорд эллипса, в которые преобразуются параллельные хорды окружности, перпендикулярные к этому диаметру.

Диаметр эллипса, сопряженный к хордам, параллельным данному диаметру, называется сопряженным к этому диаметру.

Теорема 3. *Если d_1 и d_2 — два сопряженных диаметра эллипса, то каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому.*

Доказательство. Пусть диаметр d_2 (рис. 67) параллелен хордам, которые диаметр d_1 делит пополам. Пусть d_1' и d_2' — те диаметры окружности C, в которые переходят диаметры эллипса d_1 и d_2 при сжатии его в окружность C. Тогда диаметр d_2' будет параллелен хордам, которые делит пополам диаметр d_1', а потому эти диаметры взаимно-перпендикулярны. Отсюда следует, что диаметр d_1' параллелен хордам, которые делит пополам диаметр d_2', значит и диаметр d_1 параллелен тем хордам эллипса, которые делятся пополам диаметром d_2.

Итак: каждый из диаметров d_1 и d_2 эллипса делит пополам хорды, параллельные другому.

Теорема 4. *Если эллипс не является окружностью, то он имеет только две (взаимно-перпендикулярные) оси симметрии.*

Доказательство. Диаметр окружности C, к которому производится сжатие, и диаметр, к нему перпендикулярный, переходят в оси симметрии эллипса.

Всякая пара сопряженных диаметров эллипса получается из некоторой пары взаимно-перпендикулярных диаметров окружности. Но при сжатии окружности к диаметру всякая

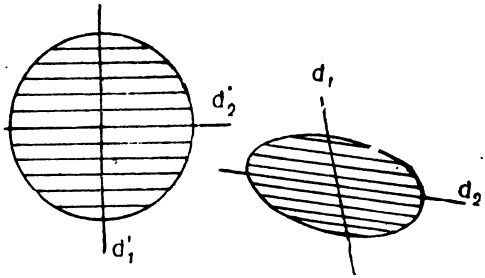


Рис. 67

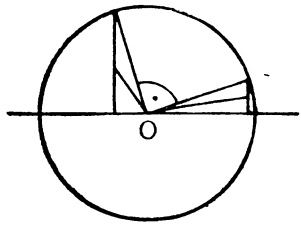


Рис. 68

пара взаимно-перпендикулярных ее диаметров, ни один из которых не лежит на оси сжатия, преобразуется в пару сопряженных диаметров эллипса, угол между которыми не прямой (рис. 68). Таким образом, середины хорд эллипса, не параллельных и не перпендикулярных оси сжатия, лежат на прямой, не перпендикулярной к этим хордам; следовательно, никакой диаметр эллипса, кроме оси сжатия и диаметра, к ней перпендикулярного, не является осью симметрии эллипса.

Назовем *радиусом* эллипса отрезок, соединяющий центр эллипса с какой-либо его точкой. Радиусы эллипса, лежащие на сопряженных диаметрах, называются *сопряженными*. Радиусы эллипса, лежащие на осях симметрии эллипса, называются его *полуосями*.

Теорема 5 (1-я теорема Аполлония). *Площадь параллелограмма, построенного на любой паре сопряженных радиусов эллипса, равна площади прямоугольника, построенного на его полуосях.*

Доказательство. При сжатии, переводящем окружность в эллипс, параллелограммы, построенные на парах сопряженных радиусов эллипса, получаются из квадратов, построенных на парах взаимно-перпендикулярных радиусов

окружности. Но эти квадраты имеют одинаковые площади. А так как при аффинном преобразовании площади всех фигур изменяются в одном и том же отношении, то и все указанные параллелограммы имеют одинаковые площади, равные площади любого из них, например площади прямоугольника, построенного на полуосях.

Теорема 6 (2-я теорема Аполлония). *Сумма квадратов длин любой пары сопряженных радиусов эллипса равна сумме квадратов длин его полуосей:*

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

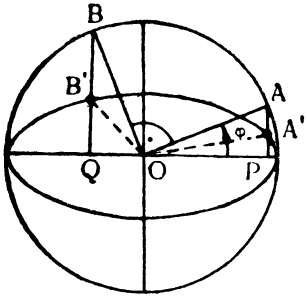


Рис. 69

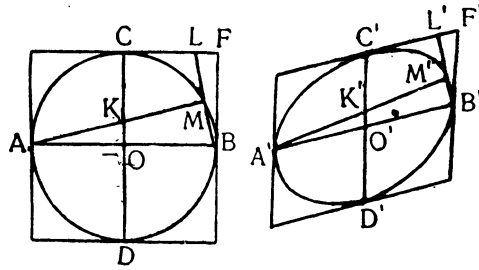


Рис. 70

Доказательство. Из рис. 69 находим:

$$A'P = AP\frac{b}{a} = OA\sin\varphi\frac{b}{a} = b\sin\varphi,$$

$$OP = OA\cos\varphi = a\cos\varphi,$$

$$B'Q = BQ\frac{b}{a} = OB\sin(90^\circ + \varphi)\frac{b}{a} = b\cos\varphi,$$

$$OQ = |OB\cos(90^\circ + \varphi)| = a\sin\varphi.$$

Отсюда:

$$a'^2 + b'^2 = OA'^2 + OB'^2 = OP^2 + PA'^2 + OQ^2 + QB'^2 =$$
$$= b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi + b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = a^2 + b^2.$$

В заключение покажем построение точек эллипса, заданного парой сопряженных радиусов.

Опишем около окружности C квадрат. Пусть M — произвольная точка окружности. Тогда, выполняя построения, указанные на рис. 70, будем иметь:

$$OK = FL, \quad KC = LC.$$

Отсюда

$$\frac{OK}{KC} = \frac{FL}{LC}.$$

Так как отношение отрезков, лежащих на одной прямой, при аффинном преобразовании не меняется, то при сжатии окружности к любому диаметру Ox будем иметь

$$\frac{OK'}{K'C'} = \frac{F'L'}{L'C'}.$$

При указанном сжатии взаимно-перпендикулярные радиусы OB и OC окружности перейдут в сопряженные радиусы OB' и OC' эллипса. Меняя положение точки K', мы, исходя из пропорции $\frac{OK'}{K'C'} = \frac{F'L'}{L'C'}$, можем построить сколько угодно точек эллипса.

§ 30. АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В КООРДИНАТАХ

Введем на плоскости систему координат xOy с началом в точке O и единичными точками E_1 и E_2.

Поставим в соответствие точке $M(x, y)$ точку $M'(x', y')$, координаты которой выражаются через координаты точки M линейными соотношениями:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \tag{1}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \tag{2}$$

Докажем, что это преобразование является аффинным.

В самом деле: каждой паре чисел x и y по формулам (1) соответствует единственная пара чисел x' и y', и значит каждой точке $M(x, y)$ ставится в соответствие определенная точка $M'(x', y')$. В силу условия $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ это соответствие взаимнооднозначно, так как при этом условии $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ для любых заданных x' и y' система (1) всегда разрешима относительно x и y, и это решение единственно.

Докажем, что преобразование, обратное к рассматриваемому, является аффинным. Рассмотрим прямую

$$A'x' + B'y' + C' = 0,$$

где A' и B' не равны нулю одновременно. Прообразом этой прямой в преобразовании (1) будет прямая

$$A'(a_1x + b_1y + c_1) + B'(a_2x + b_2y + c_2) + C' = 0,$$

или

$$(a_1A' + a_2B')x + (b_1A' + b_2B')y + c_1A' + c_2B' + C' = 0,$$

или

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

где

$$A = a_1A' + a_2B', \quad B = b_1A' + b_2B', \quad C = c_1A' + c_2B' + C'.$$

В самом деле: в уравнении (3) числа A и B не обращаются в нуль одновременно, так как в противном случае мы имели бы равенства:

$$a_1A' + a_2B' = 0,$$

$$b_1A' + b_2B' = 0,$$

откуда в силу $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ следовало бы, что

$$A' = B' = 0.$$

Итак, преобразование, обратное к рассматриваемому, является аффинным; следовательно, и данное преобразование (1) — аффинное.

Докажем теперь, что если α — аффинное преобразование, которое произвольной точке $M(x, y)$ ставит в соответствие точку $M'(x', y')$, то координаты точки M' выражаются через координаты точки M линейными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

В самом деле: пусть $O'(c_1, c_2)$, $E_1'(p_1, p_2)$, $E_2'(q_1, q_2)$ — образы точек $O(0, 0)$, $E_1(1, 0)$ и $E_2(0, 1)$ в аффинном преобразовании α. Положим в формулах (1):

$$a_1 = p_1 - c_1, \quad b_1 = q_1 - c_1,$$

$$a_2 = p_2 - c_2, \quad b_2 = q_2 - c_2.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 - c_1 & q_1 - c_1 \\ p_2 - c_2 & q_2 - c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

так как точки O', E_1' и E_2' не лежат на одной прямой.

Аффинное преобразование β, определяемое формулами (1), так же, как и аффинное преобразование α, переводит точки O, E_1 и E_2 соответственно в точки O', E_1' и E_2'; следовательно, на основании теоремы о единственности аффинного преобразования, определяемого заданием трех пар соответственных точек (см. § 25), преобразование α совпадает с преобразованием β.

Итак, мы доказали, что всякое аффинное преобразование в координатах выражается линейными соотношениями (1), где

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

и обратно: линейные соотношения (1) при условии

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

всегда выражают аффинное преобразование плоскости. Поэтому аффинное преобразование можно было бы определить как линейное преобразование:

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2$$

с определителем

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

не равным нулю, где x и y — координаты произвольной точки M плоскости, а x' и y' — координаты ее образа M' относительно одной и той же общей декартовой системы координат.

Можно показать, что определитель δ равен произведению k_1k_2 коэффициентов сжатия, получающихся при представлении аффинного преобразования в виде произведения двух сжатий к двум взаимно-перпендикулярным прямым на ортогональное преобразование.

Абсолютная величина этого определителя равна отношению площади параллелограмма, построенного на отрезках

$O'E_1'$ и $O'E_2'$, в которые переходят масштабные отрезки OE_1 и OE_2 осей Ox и Oy, к площади параллелограмма, построенного на отрезках OE_1 и OE_2.

В самом деле: при аффинном преобразовании (1) точки O, E_1 и E_2 перейдут в точки $O'(c_1, c_2)$, $E_1'(a_1+c_1, a_2+c_2)$, $E_2'(b_1+c_1, b_2+c_2)$; следовательно, отношение площади параллелограмма $O'E_1'E'E_2'$ к площади параллелограмма OE_1EE_2 равно $|\delta|$. Отсюда следует, что $|\delta|$ равен отношению площади s' образа F' любой фигуры F к площади s самой фигуры F. Для доказательства покроем фигуру F сетью параллелограммов, стороны которых параллельны осям Ox и Oy и пропорциональны OE_1 и OE_2. Эти параллелограммы перейдут в сеть параллелограммов, стороны которых параллельны прямым $O'E'_1$ и $O'E_2'$ и пропорциональны длинам отрезков $O'E_1'$ и $O'E_2'$. Число параллелограммов 1-й сети, покрывающих фигуру F, равно числу параллелограммов 2-й сети, покрывающих фигуру F'. Отношение же площадей этих параллелограммов равно $|\delta|$. Отсюда предельным переходом получаем, что $\frac{s'}{s} = |\delta|$.

§ 31. АФФИННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как доказывается в аналитической геометрии, общее уравнение второй степени между x и y в декартовой системе координат выражает линию одного из следующих девяти видов:

эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{1}$$

мнимый эллипс:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1; \tag{2}$$

две мнимые пересекающиеся прямые:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0; \tag{3}$$

гипербола:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \tag{4}$$

две пересекающиеся прямые:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0; \tag{5}$$

парабола:

$$y^2 = 2px; \tag{6}$$

две параллельные прямые:

$$x^2 = a^2; \tag{7}$$

две мнимые параллельные прямые:

$$x^2 = -a^2; \tag{8}$$

две совпадающие прямые:

$$x^2 = 0. \tag{9}$$

Это утверждение следует понимать в том смысле, что всякое общее уравнение второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

преобразованием системы координат может быть приведено к одному из указанных девяти уравнений.

Сейчас мы покажем, что эта классификация находится в тесной связи с теорией аффинных преобразований и совпадает с аффинной классификацией линий второго порядка.

Определение. *Мы говорим, что две линии второго порядка, выражаемые уравнениями:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{I}$$

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0, \tag{II}$$

принадлежат к одному аффинному классу, если существует такое аффинное преобразование

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \quad \text{где} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{III}$$

при котором одна из этих линий переходит в другую.

Если это условие не имеет места, то мы будем говорить, что линии относятся к аффинно различным классам.

Теорема. *Две линии одного и того же вида принадлежат к одному классу, тогда как две линии различных видов принадлежат к разным аффинным классам.*

Таким образом, каждый из девяти видов (1)—(9) линий второго порядка есть аффинный класс. Так, например, два любых эллипса относятся к одному аффинному классу, а любой эллипс и любая из линий второго порядка, не являющаяся эллипсом, относятся к различным аффинным классам; иначе говоря, всякие два эллипса могут быть переведены друг в друга некоторым аффинным преобразованием и любой аффинный образ эллипса есть снова эллипс.

По отношению ко всем линиям второго порядка, имеющим по крайней мере одну точку, высказанное выше утверждение имеет геометрический характер.

По отношению же к мнимому эллипсу и паре мнимых параллельных прямых его следует понимать алгебраически, а именно: если оба уравнения (I) и (II) выражают мнимый эллипс, то существует линейное преобразование (III) с определителем, отличным от нуля, которое уравнение (I) переводит в уравнение (II). Если же уравнение (I) выражает мнимый эллипс, а уравнение (II) пару мнимых параллельных прямых, то никаким линейным преобразованием (III) с определителем, отличным от нуля, нельзя одно из этих уравнений перевести в другое.

Для того чтобы доказать теорему, достаточно убедиться в справедливости следующих двух положений:

1) *две любые линии одного вида могут быть переведены одна в другую некоторым аффинным преобразованием;*

2) *любое аффинное преобразование каждую линию данного вида не может перевести в линию никакого иного вида.*

Доказательство. 1. Докажем, что все эллипсы составляют один аффинный класс. Пусть C_1 и C_2 — два произвольных эллипса. Рассмотрим ортогональное преобразование ω, переводящее центр эллипса C_1 в центр эллипса C_2 и совмещающее их соответственные главные оси. Пусть при этом преобразовании эллипс C_1 перейдет в эллипс C_1^*. Так как эллипсы C_1^* и C_2 имеют общий центр и общие оси симметрии, то их уравнения будут каноническими в одной и той же системе:

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \quad (C_2)$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \quad (C_1^*)$$

Аффинное преобразование β:

$$x = \frac{a_2}{a_1} x^*, \quad y = \frac{b_2}{b_1} y^*$$

переводит первое из этих уравнений во второе. Аффинное преобразование α, равное произведению аффинного преобразования β на ортогональное преобразование ω, эллипс C_1 переводит в эллипс C_2.

Аналогично доказывается, что любые две линии одного вида переводятся друг в друга некоторым аффинным преобразованием *.

2. Докажем, что никакие две линии различных видов не будут аффинно эквивалентны.

Действительно, эллипсы аффинно не эквивалентны линиям всех других видов, так как имеют бесконечное множество точек и ограничены, в то время как всякая другая линия второго порядка либо есть пустое множество, либо точка, либо неограничена. Линии, сводящиеся к одной точке, аффинно не эквивалентны никакой из остальных как имеющих бесконечное множество точек либо вовсе не имеющих ни одной точки. Мнимый эллипс и пара мнимых параллельных прямых аффинно не эквивалентны линиям других видов, как имеющим хотя бы одну точку. Эти линии аффинно не эквивалентны и между собой (в смысле, разъясненном выше); мы этого утверждения доказывать не будем.

Гиперболы аффинно не эквивалентны всем другим линиям второго порядка потому, что состоят из двух ветвей (каждая из которых отлична от прямой линии). Пары пересекающихся, параллельных или совпадающих прямых аффинно не эквивалентны между собой потому, что при аффинном преобразовании пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, параллельные — в параллельные, а совпадающие — в совпадающие, другим же линиям второго порядка они не эквивалентны потому, что состоят из прямых. Остаются еще параболы: аффинная неэквивалентность их другим линиям второго порядка следует из того, что парабола состоит из точек, не лежащих на одной прямой, и имеет одну неограниченную ветвь.

§ 32. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Аффинное преобразование пространства определяется так же, как и аффинное преобразование плоскости. Так же, как

* Отметим, что две любые параболы не только аффинно эквивалентны, но даже подобны.

и в случае плоскости, доказывается, что совокупность всех аффинных преобразований пространства образует группу.

При аффинном преобразовании пространства прямая переходит в прямую.

При аффинном преобразовании пространства плоскость отображается на плоскость, и это отображение является аффинным.

Это утверждение доказывается так же, как и аналогичное утверждение для ортогонального преобразования пространства (гл. II, § 5, теорема 3).

При аффинном преобразовании пространства сохраняется параллельность прямых и плоскостей.

При аффинном преобразовании пространства (так же как и в случае плоскости) сохраняется порядок точек на прямой и отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на двух параллельных прямых.

Существует и притом только одно аффинное преобразование пространства, которое четыре данные точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости, переводит в произвольно заданные четыре точки A', B', C', D', также не лежащие в одной плоскости.

Перечисленные свойства аффинного преобразования пространства доказываются так же, как и в случае плоскости.

Примерами аффинных преобразований пространства могут служить ортогональные и подобные преобразования. Совокупность всех ортогональных преобразований (так же как и совокупность всех подобных преобразований) пространства составляет подгруппу группы аффинных преобразований пространства. Другими примерами аффинных преобразований пространства могут служить: сжатие пространства к плоскости, которое определяется аналогично сжатию плоскости к прямой; сдвиг пространства относительно плоскости по направлению прямой, лежащей в этой плоскости, и др.

Теорема. *Всякое аффинное преобразование α пространства есть произведение трех сжатий к трем попарно перпендикулярным плоскостям на ортогональное преобразование.*

То простое доказательство аналогичной теоремы, которое было дано для случая плоскости (§ 26), не может быть перенесено на пространство. Мы поэтому дадим здесь другое доказательство этой теоремы.

Доказательство. Рассмотрим сферу S с центром в произвольной точке O и радиусом R. Пусть O' — образ точки O при рассматриваемом аффинном преобразовании α. Обозначим через M произвольную точку сферы S, а через M' —

ее образ при преобразовании α; тогда образом отрезка OM (радиус сферы S) будет отрезок $O'M'$. Пусть M_1 та точка сферы S, для которой отрезок $O'M_1'$ будет наименьшим среди образов $O'M'$ всех радиусов OM сферы S. Пусть π — плоскость, проходящая через точку M_1 перпендикулярно OM_1, а π' — образ плоскости π при преобразовании α. Плоскость π' проходит через точку M_1'. Докажем, что плоскость π' перпендикулярна к прямой $O'M_1'$.

Предположим, что плоскость π' не перпендикулярна прямой $O'M_1'$. Опустим из точки O' перпендикуляр $O'P'$ на плоскость π' и пусть P — прообраз точки P' при аффинном преобразовании α. Так как точка P' лежит на плоскости π', то ее прообраз P лежит на плоскости π. Точка P отлична от точки M_1 и потому отрезок OP пересекает сферу S в некоторой точке M. Образ M' точки M лежит на отрезке $O'P'$ и значит $O'M'<O'P'<O'M_1'$. Мы получили противоречие, так как по предположению радиус OM_1 переходил в самый короткий отрезок $O'M_1'$, а между тем мы нашли радиус OM, образ которого $O'M'$ короче $O'M_1'$. Этим противоречием доказано, что плоскость π' перпендикулярна к прямой $O'M_1'$.

Проведем теперь через точку O плоскость π_1, параллельную плоскости π и значит перпендикулярную радиусу OM_1 в точке O. Пусть π_1' — образ плоскости π_1 при аффинном преобразовании α. На основании предыдущего плоскость π_1' проходит через точку O' и перпендикулярна прямой $O'M_1'$. Плоскость π_1 пересекает сферу S по окружности σ радиуса R. Обозначим через OM_2 тот радиус окружности σ, образ которого $O'M_2'$ будет наименьшим среди образов $O'M'$ всех радиусов этой окружности. Аналогично предыдущему доказывается, что если в плоскости π_1 проведем через точку M_2 прямую, перпендикулярную радиусу OM_2, то она перейдет в прямую, лежащую в плоскости π_1' и перпендикулярную к отрезку $O'M'_2$. Поэтому радиус OM_3 окружности σ, перпендикулярный к OM_2, перейдет в отрезок $O'M_3'$, лежащий в плоскости π_2' и перпендикулярный к отрезку $O'M_2'$. Таким образом, мы доказали существование трех попарно перпендикулярных прямых OM_1, OM_2 и OM_3, образы которых $O'M_1'$, $O'M_2'$, $O'M_3'$ также попарно перпендикулярны. Отсюда следует, что три попарно перпендикулярные плоскости π_1, π_2, π_3, проведенные через пары прямых OM_2, OM_3; OM_3, OM_1; OM_1, OM_2, переходят в три попарно перпендикулярные плоскости π_1', π_2', π_3' (рис. 71).

Рассмотрим ортогональное преобразование Ω, которое точку O переводит в точку O', а лучи OM_1, OM_2, OM_3 соответ-

ственно в лучи $O'M_1'$, $O'M_2'$, $O'M_3'$. Пусть M_1^*, M_2^*, M_3^* — образы точек M_1, M_2, M_3 при преобразовании Ω. Рассмотрим далее три сжатия ξ_1, ξ_2, ξ_3 к плоскостям π_1', π_2' и π_3', которые точки M_1^*, M_2^*, M_3^* переводят соответственно в точки M_1', M_2', M_3'. Аффинное преобразование $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \Omega$ так же, как и преобразование α, точки O, M_1, M_2 и M_3 переводит соответственно в точки O', M_1', M_2', M_3' и потому

$$\alpha = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \Omega.$$

В проведенном доказательстве имеется существенный пробел. А именно: мы не доказали, что среди отрезков $O'M'$, являющихся образами радиусов OM сферы, существует наименьший.

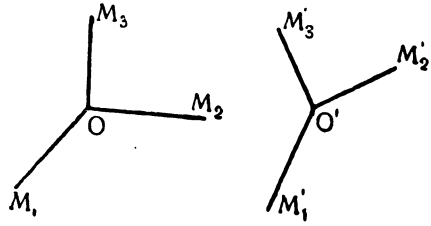


Рис. 71

Доказательство этого положения основано на том, что длина отрезка $O'M'$ есть непрерывная функция точки M сферы S, а в силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, достигает на этом множестве как своего наибольшего, так и своего наименьшего значения. Сфера является замкнутым и ограниченным множеством. Непрерывность функции $O'M'=f(M)$ следует из того, что аффинное преобразование пространства $M'=\alpha(M)$ является непрерывным отображением. Непрерывность аффинного преобразования вытекает из того, что координаты точки M' являются линейными, а следовательно, и непрерывными функциями координат точки M. Непрерывность аффинного преобразования может быть установлена и геометрически, исходя непосредственно из свойств аффинного преобразования. Эта непрерывность вытекает из того, что прообразом окрестности точки M' (например, параллелепипедальной окрестности точки M') является также параллелепипедальная окрестность.

Замечание. Только что указанный метод доказательства возможности представления аффинного преобразования

в виде произведения сжатий на ортогональное преобразование может быть применен и к аффинному отображению плоскости на плоскость.

Если $Oxyz$—аффинная система координат в пространстве, $M(x, y, z)$ — какая-нибудь точка пространства, $M'(x', y', z')$— ее образ при аффинном преобразовании, то координаты точки M' являются линейными функциями координат точки M:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причем

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (2)$$

$|\Delta|$ равен отношению объема v' тела T' к объему v тела T, являющегося прообразом тела T' при аффинном преобразовании α.

Если аффинное преобразование (1) представлено в виде произведения трех сжатий ξ_1, ξ_2, ξ_3 к трем взаимно-перпендикулярным плоскостям π_1', π_2', π_3' с коэффициентами сжатия k_1, k_2, k_3 на ортогональное преобразование Ω, то можно найти как сами плоскости π_1', π_2', π_3', так и коэффициенты сжатия k_1, k_2, k_3; однако при этом приходится решать уравнение 3-й степени, дающее значения для коэффициентов сжатий.

Аффинные преобразования пространства кладут в основу аффинной классификации поверхностей второго порядка. При этом доказывается, что существуют следующие 17 аффинно различных классов поверхностей: 1) эллипсоиды; 2) мнимые эллипсоиды; 3) мнимые конусы; 4) однополостные гиперболоиды; 5) двуполостные гиперболоиды; 6) конусы; 7) эллиптические параболоиды; 8) гиперболические параболоиды; 9) эллиптические цилиндры; 10) мнимые эллиптические цилиндры; 11) пары мнимых пересекающихся плоскостей; 12) гиперболические цилиндры; 13) пары пересекающихся плоскостей; 14) параболические цилиндры; 15) пары параллельных плоскостей; 16) пары мнимых параллельных плоскостей; 17) пары совпадающих плоскостей.

ГЛАВА V

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 33. ПОНЯТИЕ О ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Мы определили аффинное отображение плоскости на плоскость как взаимнооднозначное отображение, сохраняющее прямолинейное расположение точек. Возникает вопрос: возможно ли установить такое соответствие между плоскостями, которое не было бы аффинным, но которое сохраняло бы прямолинейное расположение точек? Ясно, что если такое соответствие между множествами точек двух плоскостей установить возможно, то оно не должно быть взаимнооднозначным.

Весьма важным примером такого соответствия является перспектива.

Рассмотрим две различные плоскости π и π' (рис. 72) и точку S, не лежащую ни на одной из них. Будем проектировать из точки S точки плоскости π в плоскость π', т. е. поставим в соответствие точке M плоскости π в точку M', в которой прямая SM пересекает плоскость π'. Такое соответствие будем называть *перспективным соответствием* плоскостей π и π', а точку S — *центром перспективы*.

Пусть A, B, C — три точки в плоскости π, лежащие на одной прямой. Если при рассматриваемом соответствии у точек A, B и C есть образы A', B', C', т. е. ни одна из прямых SA, SB и SC не параллельна плоскости π', то точки A', B' и C' так же, как и точки A, B и C, лежат на одной прямой. Таким образом, при перспективном соответствии двух плоскостей сохраняется прямолинейное расположение точек. Однако рассматриваемое перспективное соответствие между плоскостями π и π' не является взаимнооднозначным: не каждая точка плоскости π имеет образ на плоскости π' и не каждая точка плоскости π' имеет прообраз в плоскости π. В самом деле:

проведем через точку S плоскости, параллельные плоскостям π' и π; пусть эти плоскости пересекаются с плоскостями π и π' соответственно по прямым k и l' (рис. 73). Тогда никакая точка M прямой k плоскости π не имеет образа на плоскости π', так как прямая SM параллельна плоскости π', т. е. не имеет с этой плоскостью ни одной общей точки. Вместе с тем все остальные точки плоскости π имеют образы на плоскости π'. Точно так же никакая точка M' прямой l' не имеет прообраза на плоскости π, так как прямая SM' параллельна плоскости π и значит не имеет с этой плоскостью ни одной общей точки; все остальные точки плоскости π' имеют прообразы на плоскости π.

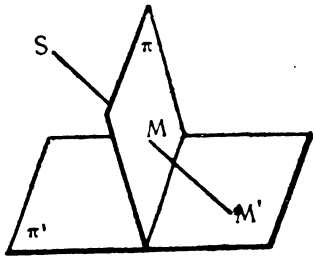


Рис. 72

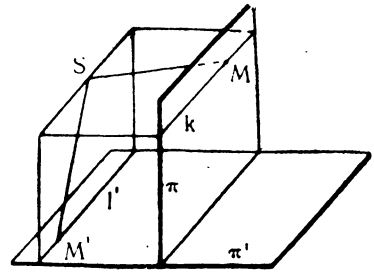


Рис. 73

Таким образом, если взять фигуру F в плоскости π, в состав которой входят точки прямой k, то ее изображение — проекция из точки S на плоскость π' — не будет полным, так как у точек фигуры F, лежащих на прямой k, не будет образов. С другой стороны, на изображении могут быть такие точки, которых нет у самого предмета: это точки прямой l'.

Так, например, рис. 74 представляет собой перспективное изображение равнины, по которой проходит железная дорога. Рельсы на рисунке пересекаются в точке, которая не является изображением какой-либо точки местности.

Изучение перспективного соответствия естественным образом приводит к пополнению плоскостей π и π' новыми элементами, благодаря чему перспективное соответствие становится взаимнооднозначным. Такое пополнение плоскостей новыми элементами приводит к образованию нового геометрического объекта, называемого проективной плоскостью, и к созданию новой математической дисциплины — проективной геометрии. Пополняя плоскость новыми элементами, мы должны заботиться о том, чтобы в «расширенной» плоскости по-прежнему выполнялась основная аксиома элементарной

геометрии: через две различные точки можно провести прямую и притом только одну. Целью же нашего расширения плоскости является выполнение того условия, чтобы каждые

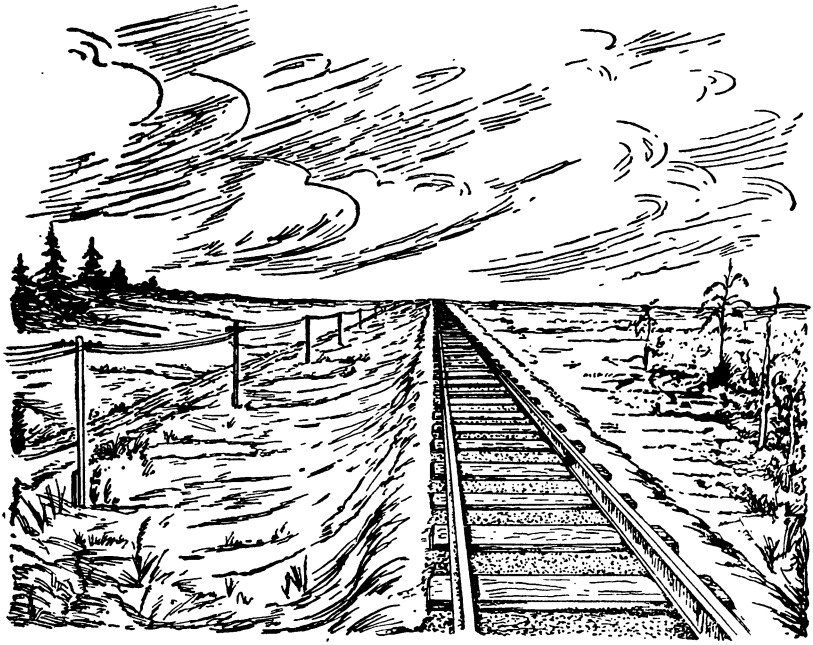


Рис. 74

две различные прямые плоскости имели общую точку и притом только одну. Эти соображения и являются основанием к приводимому ниже построению проективной плоскости.

п. 1. Первая модель проективной плоскости

Присоединим к множеству точек прямой линии новый элемент, природа которого для нас совершенно безразлична. Мы получим новое множество, состоящее из точек рассматриваемой прямой и вновь присоединенного элемента. Это новое множество называется *проективной прямой,* соответствующей взятой обыкновенной прямой. Элемент, вновь присоединенный к множеству точек обыкновенной прямой, называется «несобственной», или «бесконечноудаленной», или «идеальной», точкой проективной прямой.

Условимся в следующем: если на плоскости взять две пересекающиеся прямые, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки, т. е. эти проективные прямые образуются присоединением двух различных элементов к множествам точек обыкновенных прямых. Если же прямые параллельны, то условимся в том, что соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку, т. е. в этом случае мы получаем эти проективные прямые присоединением одного и того же элемента к каждому из множеств точек взятых прямых.

Совокупность всех несобственных точек, т. е. совокупность всех вновь присоединенных элементов, назовем *несобственной,* или *бесконечноудаленной,* проективной прямой.

Множество, состоящее из всех точек рассматриваемой эвклидовой плоскости π *и всех несобственных точек, называется проективной плоскостью.*

Условимся в следующей терминологии: точки и прямые эвклидовой плоскости и самое эвклидову плоскость будем называть обыкновенными точками, обыкновенными прямыми и обыкновенной плоскостью. Обыкновенные точки, рассматриваемые как элементы множества, являющегося проективной прямой или проективной плоскостью, будем называть собственными точками. Все прямые проективной плоскости, кроме несобственной, будем называть собственными прямыми проективной плоскости. Далее: будем говорить, что точка (как собственная, так и несобственная), которая принадлежит множеству, составляющему проективную прямую, *лежит* на этой прямой или что проективная прямая *проходит* через эту точку.

Покажем, что построенная только что проективная плоскость удовлетворяет тем требованиям, о которых мы говорили выше:

1) *через любые две различные точки проективной плоскости проходит и притом только одна прямая.*

В самом деле: если эти две точки обыкновенные, то существует и притом только одна обыкновенная прямая, проходящая через эти точки, которой соответствует вполне определенная проективная прямая, проходящая (по принятой нами терминологии) через две эти точки.

Если одна из точек собственная, а другая несобственная, то из пучка параллельных прямых, к каждой из которых присоединен этот несобственный элемент, нужно выбрать ту обыкновенную прямую, которая проходит через данную собственную точку. Проективная прямая, которую мы получим,

присоединив к этой обыкновенной прямой данную несобственную точку, и будет той единственной прямой, которая проходит через две данные точки.

Если, наконец, обе данные точки несобственные, то они по определению лежат на единственной несобственной прямой.

2) *Любые две различные прямые проективной плоскости имеют и притом только одну общую точку.*

В самом деле: если обе прямые собственные, то они соответствуют двум различным обыкновенным прямым; если эти прямые пересекаются, то данные проективные прямые имеют различные несобственные точки и значит указанная выше обыкновенная точка пересечения является единственной точкой, общей для двух данных проективных прямых. Если же обыкновенные прямые, которым соответствуют данные проективные, параллельны, то данные проективные прямые по определению имеют общую им обеим несобственную точку, и эта точка является единственной точкой, общей для данных прямых. Наконец, если одна из данных проективных прямых несобственная, а другая собственная, то единственной их общей точкой является несобственная точка данной собственной прямой.

Мы видим, что на проективной плоскости нет параллельных прямых: *всякие две проективные прямые проективной плоскости — пересекаются.*

п. 2. Однородные координаты

Метод координат на обыкновенной плоскости с успехом применяется при решении целого ряда вопросов эвклидовой геометрии. Координатный метод может быть применен и на проективной плоскости. Однако введение на проективной плоскости координат осложняется наличием на ней несобственных элементов.

Пусть Π — проективная плоскость, соответствующая обыкновенной плоскости π. Введем на плоскости π декартову (не обязательно прямоугольную) систему координат. Если точка M — собственная точка плоскости Π, то в выбранной системе координат на плоскости π она имеет координаты x, y.

Рассмотрим три числа x, y, 1 и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3$ всех троек чисел, пропорциональных тройке x, y, 1:

$$x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1,$$

т. е.

$$x_1 = \lambda x, \quad x_2 = \lambda y, \quad x_3 = \lambda,$$

где λ принимает все действительные значения, кроме нуля. Так как $x_3 \neq 0$, то

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Любая тройка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3$ называется *однородными* координатами точки M.

Если M — несобственная точка плоскости П, то через нее проходит пучок прямых, которые соответствуют параллельным между собой прямым плоскости π. Возьмем какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$, коллинеарный этим прямым; пусть X, Y — координаты этого вектора. Рассмотрим тройку чисел X, Y, 0 и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3$ всех троек чисел, пропорциональных тройке X, Y, 0:

$$x_1 : x_2 : x_3 = X : Y : 0,$$

т. е.

$$x_1 = \lambda X, \quad x_2 = \lambda Y, \quad x_3 = 0,$$

где λ принимает все действительные значения, кроме нуля.

Любая тройка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3$ называется *однородными* координатами несобственной точки M.

Заметим, что если выбрать другой вектор $\boldsymbol{b} \neq 0$, коллинеарный указанному пучку параллельных прямых, то он будет коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, следовательно, его координаты X', Y' будут пропорциональны координатам X, Y вектора $\boldsymbol{a}$, а потому класс $X : Y : 0$ совпадает с классом $X' : Y' : 0$.

Таким образом, мы ввели понятие координат как для собственных точек, так и для несобственных точек плоскости П; при этом если на обыкновенной плоскости каждой точке соответствует определенная упорядоченная пара чисел (ее координаты), то на проективной плоскости каждой точке ставится в соответствие даже не тройка чисел, а целый класс пропорциональных упорядоченных троек чисел.

Одним из основных положений аналитической геометрии на плоскости является утверждение: любая прямая на плоскости выражается уравнением первой степени и обратно. На проективной плоскости имеет место аналогичная теорема.

Теорема. *Любая проективная прямая на проективной плоскости выражается линейным однородным уравнением между однородными координатами точек этой прямой и обратно: всякое линейное однородное уравнение первой степени с тремя неизвестными определяет на проективной плоскости проективную прямую.*

Доказательство. Пусть L — произвольная проективная прямая, лежащая на проективной плоскости. Если эта прямая собственная, то она соответствует некоторой обыкновенной прямой l на обыкновенной плоскости π. Прямая l на обыкновенной плоскости π в декартовой системе координат выражается уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0,$$

где или $A \neq 0$, или $B \neq 0$. Возьмем на проективной прямой L собственную точку M (x, y); тогда ее координаты будут удовлетворять уравнению $Ax + By + C = 0$. Но так как эта точка собственная, то, обозначая ее однородные координаты через $x_1 : x_2 : x_3$, имеем

$$x_3 \neq 0, \quad x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

и значит

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0,$$

или

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Если же M — несобственная точка прямой L, то вектор $\boldsymbol{a} = \{-B, A\}$ не равен нулю и параллелен прямой l, которой соответствует L, поэтому, полагая $x_1 : x_2 : x_3 = -B : A : 0$ или $x_1 = -\lambda B$, $x_2 = \lambda A$, $x_3 = 0$, будем иметь

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = A(-\lambda B) + B\lambda A + C \cdot 0 = 0,$$

т. е. уравнение $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ удовлетворяется и координатами несобственной точки прямой L.

Мы доказали, что однородные координаты любой точки собственной проективной прямой L удовлетворяют уравнению $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Если же точка M $(x_1 : x_2 : x_3)$ не лежит на прямой L, то ее координаты не удовлетворяют написанному уравнению. В самом деле: если M $(x_1 : x_2 : x_3)$ собственная точка, то $x_3 \neq 0$ и тогда $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ будут декартовыми координатами точки M; точка M не лежит на прямой l, которой соответствует проективная прямая L; поэтому $A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C \neq 0$ и значит $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \neq 0$.

Если M $(x_1 : x_2 : x_3)$ несобственная точка, не лежащая на прямой L, то $x_3 = 0$ и вектор с координатами x_1, x_2 не параллелен прямой l, значит $Ax_1 + Bx_2 \neq 0$ или (так как $x_3 = 0$) $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ 0.

Пусть теперь L — несобственная прямая. По определению она представляет собой множество всех несобственных точек проективной плоскости. Но по определению однородных координат для всех таких точек (и только для них) $x_3 = 0$; следовательно, уравнение несобственной прямой в однородных координатах имеет вид

$$x_3 = 0.$$

Итак, любая прямая проективной плоскости выражается линейным однородным уравнением

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

где или $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$.

Докажем обратное положение. Пусть дано уравнение

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

где или $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Если $A = B = 0$, $C \neq 0$, то уравнение $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ принимает вид $x_3 = 0$, т. е. выражает несобственную прямую.

Пусть теперь или $A \neq 0$, или $B \neq 0$. Рассмотрим множество всех собственных точек плоскости П, координаты которых удовлетворяют данному уравнению $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. Так как все точки собственные, то для всех этих точек $x_3 \neq 0$ и уравнение $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ может быть записано так:

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0,$$

или

$$Ax + By + C = 0,$$

где $x = \frac{x_1}{x_3}$ и $y = \frac{x_2}{x_3}$ — декартовы координаты точки. Но последнее уравнение на обыкновенной плоскости π выражает прямую. Значит множество всех собственных точек плоскости П, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, образуют прямую линию l на плоскости π.

Теперь найдем те несобственные точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Полагая для этого

в уравнении $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$ $x_3 = 0$, найдем: $x_1 : x_2 = -B : A$, и значит имеется только одна несобственная точка $(-B : A : 0)$, координаты которой удовлетворяют данному уравнению. Но эта несобственная точка лежит на прямой L, которая поставлена в соответствие прямой l. Итак, множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$, где или $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$, есть множество точек некоторой проективной прямой L проективной плоскости П.

п. 3. Вторая модель проективной плоскости

Возьмем в пространстве точку S, не лежащую в обыкновенной плоскости π, которой соответствует проективная плоскость П. Поставим в соответствие каждой собственной точке M проективной плоскости П прямую SM, соединяющую точку S с этой точкой M, а каждой несобственной точке проективной плоскости П прямую связки, параллельную тем прямым плоскости π, которым соответствуют проективные прямые, проходящие через рассматриваемую несобственную точку.

Построенное соответствие между множеством всех точек проективной плоскости и множеством всех прямых связки обыкновенного трехмерного эвклидова пространства является взаимнооднозначным. Это соответствие обладает следующим свойством: если на проективной плоскости взять любую проективную прямую, то множеству всех точек этой прямой в связке S соответствует множество всех прямых некоторого пучка, т. е. множество всех прямых, проходящих через точку S и лежащих в некоторой плоскости.

В самом деле: если прямая собственная, то она соответствует некоторой обыкновенной, а множеству всех точек этой последней соответствует множество всех прямых, проходящих через точку S и пересекающих эту прямую. Все эти прямые лежат в плоскости, проходящей через точку S и обыкновенную прямую. Несобственной точке проективной прямой соответствует прямая связки S, также лежащая в этой плоскости, — это будет прямая, проходящая через точку S параллельно указанной выше обыкновенной прямой. Если данная проективная прямая несобственная, то множеству ее точек соответствует множество всех прямых пучка с центром в точке S, каждая из которых параллельна обыкновенной плоскости, которой соответствует данная проективная.

Итак: *мы установили взаимнооднозначное соответствие между множеством всех точек проективной плоскости и*

множеством всех прямых связки обыкновенного трехмерного эвклидова пространства такое, что каждой точке A (собственной или несобственной) проективной плоскости соответствует прямая связки с центром в точке S, а каждой проективной прямой a (собственной или несобственной) соответствует пучок прямых с центром в точке S или плоскость этого пучка.

При этом если точка A лежит на прямой a, то плоскость α, соответствующая прямой a, проходит через прямую l связки, соответствующую точке A.

Указанные свойства дают повод также назвать проективной плоскостью самое связку прямых и плоскостей обыкновенного трехмерного эвклидова пространства. «Точками» этой проективной плоскости будут прямые связки, а «прямыми» — плоскости связки (или пучки прямых с центром в центре связки).

Отношения принадлежности «точек» и «прямых» означают теперь следующее: *«точка» A лежит на «прямой» a (или «прямая» a проходит через «точку» A), если прямая A связки лежит в плоскости a связки.*

Для определенной таким образом проективной плоскости имеют место сформулированные выше свойства точек и прямых:

1) *через любые две различные «точки» проективной плоскости проходит и притом только одна проективная «прямая».*

Это теперь означает, что через любые две различные прямые связки всегда проходит и притом только одна плоскость связки.

2) *Любые две различные проективные «прямые» имеют общую «точку» и притом только одну.*

Это означает, что любые две различные плоскости связки имеют общую прямую связки и притом только одну.

п. 4. Проективные координаты

Покажем теперь, как можно ввести координаты «точек» для второй модели проективной плоскости.

Введем в пространстве систему координат $S\ x_1x_2x_3$, принимая за начало координат центр S связки, а за оси координат три прямые Sx_1, Sx_2, Sx_3 связки, не лежащие в одной плоскости (рис. 75). Возьмем произвольную «точку», т. е. произвольную прямую l связки; выберем на этой прямой l произвольную точку M, не совпадающую с центром S связки. Пусть x_1, x_2, x_3 — координаты точки M в системе $S\ x_1x_2x_3$. Тогда тройка чисел x_1, x_2, x_3 называется проективными координатами

выбранной «точки» l. Если мы возьмем на прямой l другую точку M' (x_1', x_2', x_3'), не совпадающую с S, то

$$x_1 : x_2 : x_3 = x_1' : x_2' : x_3',$$

и, обратно, если

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_2 : x_3,$$

то точка $M'(x_1', x_2', x_3')$ будет лежать на прямой l. Поэтому любые три числа, пропорциональные числам x_1, x_2, x_3, также являются проективными координатами выбранной «точки». Таким образом, каждой «точке» проективной плоскости соответствует класс пропорциональных троек ее координат. Так как уравнение всякой плоскости, проходящей через начало координат, имеет вид

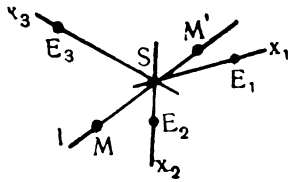


Рис. 75

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

и обратно, то мы и для этой модели проективной плоскости приходим к теореме: всякая «прямая» проективной плоскости выражается линейным однородным уравнением $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$, где или $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$, и обратно: любое такое уравнение выражает «прямую».

п. 5. Связь проективных координат в первой и второй модели проективной плоскости

Проведем через точку E_3 (0, 0,1) плоскость π, параллельную плоскости x_1Sx_2. Введем на плоскости π систему координат, принимая за начало координат точку E_3, за оси координат прямые E_3x и E_3y, соответственно параллельные прямым Sx_1 и Sx_2, и выбирая на осях E_3x и E_3y масштабные отрезки, соответственно равные масштабным отрезкам осей Sx_1 и Sx_2 (рис. 76). Обозначим через П проективную плоскость, которая соответствует плоскости π. Тогда проективные координаты $x_1 : x_2 : x_3$ «точки» l будут однородными координатами точки M (на плоскости П) соответствующей прямой l.

В самом деле: пусть «точке» l соответствует собственная точка M плоскости П, т. е. прямая l пересекает плоскость π в точке M. Тогда точка M в системе координат $Sx_1x_2x_3$ имеет координаты x_1, x_2, 1. Но так как масштабный отрезок оси E_3x равен масштабному отрезку оси Sx_1, а масштабный отрезок

оси E_3y равен масштабному отрезку оси Sx_2, то $x_1=x$, $y_1=y$. Значит первые две координаты тройки чисел x_1, x_2, 1, являющиеся проективными координатами «точки» l, будут декартовыми координатами точки M, т. е. проективные координаты $x_1 : x_2 : x_3$ «точки» l являются однородными координатами соответствующей ей собственной точки M плоскости П.

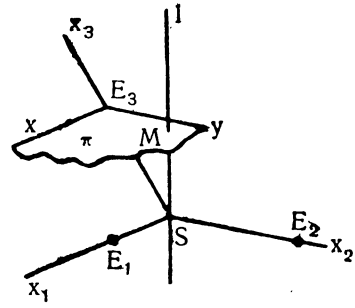


Рис. 76

Если «точке» l соответствует несобственная точка плоскости П, т. е. если прямая l параллельна плоскости π, то $x_3=0$, а x_1, x_2 являются координатами вектора, коллинеарного прямой l и лежащего в плоскости π. Таким образом, и в этом случае проективные координаты «точки» l являются однородными координатами соответствующей несобственной точки плоскости П.

п. 6. Замечания

Мы построили две модели проективной плоскости. Изучение проективной геометрии можно производить на любой из них. Первая модель имеет то преимущество, что она связывает понятие проективной плоскости с представлением об обыкновенной эвклидовой плоскости и даже более того: построения, относящиеся к проективной плоскости, могут быть выполняемы на обыкновенной плоскости (которой соответствует данная проективная). Достоинством второй модели проективной плоскости является возможность сведения изучения свойств проективной плоскости к изучению соответствующих свойств обыкновенного трехмерного эвклидова пространства.

Можно было бы построить и другие модели проективной плоскости. В частности, мы получим такую модель, если назовем проективной плоскостью совокупность классов пропорциональных троек чисел.

Каждый класс $(x_1 : x_2 : x_3)$ упорядоченных пропорциональных троек чисел называется точкой проективной плоскости, а любая из троек чисел этого класса — проективными координатами точки. Прямою в этом случае называется совокупность точек, координаты которых удовлетворяют линейному однородному уравнению

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,$$

где или $u_1 \neq 0$, или $u_2 \neq 0$, или $u_3 \neq 0$.

Такая модель проективной плоскости дает возможность при решении вопросов проективной геометрии широко использовать алгебраические методы исследования, допускает непосредственное обобщение на проективные пространства любого числа измерений и позволяет ввести понятие проективных пространств исходя из произвольных полей, в частности, что особенно важно, построить проективную геометрию над полем комплексных чисел.

Естественно возникает вопрос: что же такое проективная плоскость, если для этого понятия мы дали уже три совершенно различных реализации? Исчерпывающий ответ на этот вопрос можно дать, рассматривая аксиомы проективной геометрии.

Сейчас отметим лишь, что построенные объекты мы потому называем проективной плоскостью, что, несмотря на различие вещей, являющихся точками и прямыми, эти вещи связаны одинаковыми отношениями друг к другу; так, в обоих случаях через любые две различные точки проходит и притом только одна прямая и любые две различные прямые имеют и притом только одну общую точку. Это лишь одно из свойств, общих рассмотренным объектам, названным проективной плоскостью.

Чтобы определить проективную плоскость, надо задать ее аксиоматически, т. е.

1) указать, каковы те основные отношения, которыми связаны элементы множества, называемого проективной плоскостью, и

2) перечислить те свойства (аксиомы), которым подчинены эти отношения.

При этом, следуя аксиоматическому построению проективной плоскости, мы еще требуем, чтобы система аксиом была полной, т. е. чтобы два множества, которые мы называем проективными плоскостями, были изоморфны. Это означает, что между этими множествами существует такое взаимнооднозначное соответствие, что если элементы одного множества связаны любым отношением, описываемым при помощи основных отношений, вытекающих из аксиом, то соответствующие им элементы второго множества связаны теми же отношениями, и наоборот.

Построенные выше разные модели мы потому назвали проективными плоскостями, что между ними можно установить взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее одно

из основных понятий — отношение принадлежности и две основные аксиомы, описывающие отношение принадлежности. Конечно, этими отношениями и аксиомами далеко еще не исчерпывается полный перечень всех отношений и аксиом, при выполнении которых оба множества будут изоморфны. В действительности построенные модели изоморфны и с точки зрения всей системы отношений и аксиом проективной геометрии.

§ 34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКТИВНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение. *Проективным отображением проективной плоскости* Π *на проективную плоскость* Π' *называется такое взаимнооднозначное отображение плоскости* Π *на плоскость* Π', *при котором трем любым различным точкам плоскости* Π, *лежащим на одной прямой, соответствуют три точки плоскости* Π', *также лежащие на одной прямой.*

Проективное отображение проективной плоскости Π на самое себя называется *проективным преобразованием* плоскости Π.

Так же, как и в случае аффинных отображений, доказывается, что отображение, обратное проективному, есть проективное и что *множество всех проективных преобразований плоскости образует группу.*

Читатель без труда отметит, что данное определение проективного отображения плоскости в точности такое же, как и определение аффинного отображения. Однако эти определения относятся к разным объектам: определение аффинного отображения дается для эвклидовой плоскости, определение проективного отображения дано для проективной плоскости. Это обстоятельство делает эти определения одинаковыми лишь по форме; по существу же и понятия и свойства проективных отображений отличны, конечно, от аффинных отображений.

Простейшим примером проективного отображения одной проективной плоскости на другую является перспективное отображение.

Возьмем в пространстве две различные плоскости π и π' и дополним каждую из них до проективных Π и Π', присоединяя несобственные элементы. Возьмем в пространстве точку S, не лежащую ни на одной из плоскостей π и π'. Тогда, как было показано в § 33, п. 3, между множеством всех точек плоскости Π и множеством всех прямых связки S можно установить взаимнооднозначное соответствие.

То же самое можно сделать по отношению к множеству всех точек плоскости Π' и всех прямых связки S.

Таким образом, множества всех точек плоскостей П и П′ можно привести во взаимнооднозначное соответствие, поставив в соответствие точке M плоскости П ту точку M' плоскости П′, которая соответствует той же прямой связки S, что и точка M.

Это взаимнооднозначное соответствие плоскостей П и П′ мы будем называть *перспективным соответствием*. Возвращаясь к чертежу 73 и считая, что плоскости π и π' дополнены до проективных П и П′, мы видим, что любой собственной точке K прямой k соответствует та несобственная точка K' плоскости П′, которая присоединена к прямым плоскости π', параллельным прямой SK связки S.

Каждая точка L' прямой l' имеет теперь прообраз L в плоскости П: этот прообраз есть несобственная точка L плоскости П, которая присоединена к прямым плоскости π, параллельным прямым SL' связки S. Отметим, что несобственная точка прямой, по которой пересекаются плоскости π и π', одна и та же для обеих плоскостей П и П′ и она так же, как и любая точка линии пересечения плоскостей π и π', сама себе соответствует при установленном перспективном отображении плоскостей П и П′.

Установленное перспективное соответствие двух проективных плоскостей П и П′, соответствующих двум эвклидовым плоскостям π и π', мы распространим и на тот случай, когда плоскости π и π' параллельны. В этом случае всякой собственной точке плоскости П будет соответствовать собственная же точка плоскости П′ и наоборот, а всякой несобственной точке плоскости П, присоединенной к обыкновенной прямой a плоскости π, будет соответствовать несобственная же точка плоскости П′, присоединенная к обыкновенным прямым плоскости π', параллельным прямой a, и обратно.

§ 35. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

п. 1. Первая основная теорема

Докажем теорему, которая имеет важное значение не только для проективной геометрии, но и практическое, например, для аэрофотосъемки (см. ниже п. 3).

Теорема I. *Каковы бы ни были четыре точки A, B, C, D проективной плоскости П, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и четыре точки A', B', C', D' проективной плоскости П′, из которых никакие три не лежат на одной пря-*

мой, существует и притом только одно проективное отображение плоскости П *на плоскость* П′, *при котором точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A′, B′, C′, D′.* Эта теорема содержит в себе два утверждения:

1) существование проективного отображения, переводящего точки A, B, C, D в точки A', B', C', D';

2) единственность такого отображения.

При доказательстве этой теоремы мы будем интерпретировать проективную плоскость как связку прямых и плоскостей трехмерного эвклидова пространства.

Доказательство существования. Пусть S и S' — две проективные плоскости, которые мы будем интерпретировать как две связки прямых и плоскостей эвклидова пространства (рис. 77); A, B, C, D — четыре «точки» «проективной плоскости» S, из которых никакие три не лежат на одной «прямой» (т. е. A, B, C, D—четыре прямые связки, из которых никакие три не лежат в одной плоскости связки). Пусть далее A', B', C', D'—четыре «точки» «проективной плоскости» S', из которых никакие три не лежат на одной «прямой».

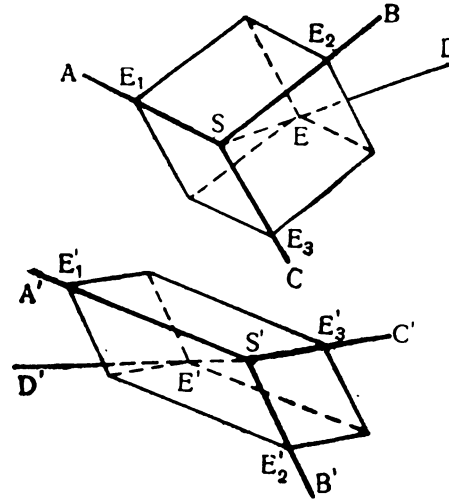


Рис. 77

Возьмем на прямой D точку E, отличную от S, и проведем через точку E три плоскости, соответственно параллельные парам прямых (B, C), (C, A), (A, B). Пусть эти плоскости пересекают прямые A, B, C соответственно в точках E_1, E_2, E_3.

Аналогичное построение выполним и в связке S': на прямой D' возьмем произвольную точку E', отличную от S', проведем через нее три плоскости, параллельные парам прямых: (B', C'), (C', A'), (A', B'), и обозначим через E_1', E_2', E_3' точки пересечения этих плоскостей с прямыми A', B', C'.

Рассмотрим аффинное преобразование пространства, при котором точки S, E_1, E_2, E_3 переходят соответственно

в точки S', E_1', E_2', E_3'. При этом аффинном преобразовании точка E переходит в точку E' и, следовательно, прямые A, B, C, D связки S переходят в прямые A', B', C', D' связки S'.

Это аффинное преобразование устанавливает такое взаимнооднозначное отображение α множества всех прямых связки S на множество всех прямых связки S', при котором каждым трем прямым связки S, лежащим в одной плоскости, соответствуют три прямые связки S', также лежащие в одной плоскости.

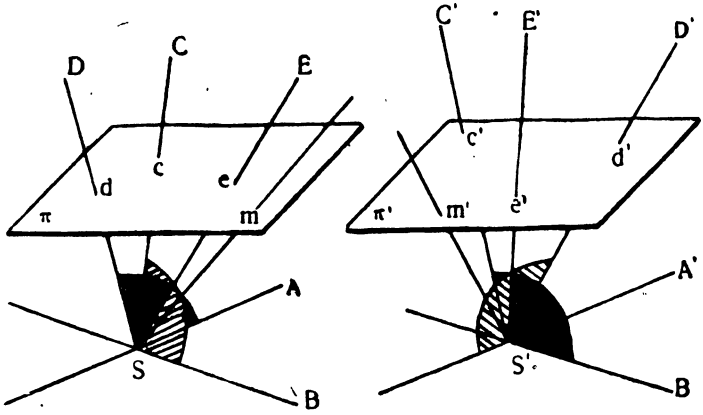


Рис. 78

Поэтому это отображение α можно рассматривать как проективное отображение «проективной плоскости» S на «проективную плоскость» S'. В этом проективном отображении «точки» A, B, C, D переходят соответственно в «точки» A', B', C', D'. Существование проективного отображения, требуемого условиями теоремы 1, таким образом, доказано.

Доказательство единственности. Пусть α — какое-нибудь проективное отображение «проективной плоскости» S на «проективную плоскость» S', при котором «точки» A, B, C, D переходят соответственно в «точки» A', B', C', D'.

Обозначим через E прямую, по которой пересекаются плоскости AD и BC *, а через E' прямую, по которой пересекаются плоскости $A'D'$ и $B'C'$ (рис. 78).

* Через AD мы обозначаем плоскость связки, проходящую через прямые A и D, через BC — плоскость связки, проходящую через прямые B и C.

Так как при отображении α прямым A, B, C, D соответствуют прямые A', B', C', D', прямая E лежит в плоскостях AD и BC, а прямая E' лежит в плоскостях $A'D'$ и $B'C'$, то в отображении α прямой E соответствует прямая E'. Прямые C, D, E не лежат в одной плоскости и ни одна из них не лежит в плоскости AB; точно так же прямые C', D' и E' не лежат в одной плоскости и ни одна из них не лежит в плоскости $A'B'$. Пересечем связки S и S' какими-нибудь плоскостями π и π', параллельными соответственно плоскостям AB и $A'B'$.

Пусть c, d, e — точки встречи плоскости π с прямыми C, D, E, а c', d', e' — точки встречи плоскости π' с прямыми C', D', E'.

Возьмем на плоскости π произвольную точку m; так как прямая Sm не лежит в плоскости AB, то ее образ $S'm'$ в отображении α не будет лежать в плоскости $A'B'$, а потому будет пересекать плоскость π' в некоторой точке m'. Поставим в соответствие точке m плоскости π точку m' плоскости π'. Это соответствие α^* является аффинным отображением плоскости π на плоскость π'.

В самом деле:

1) каждой точке m эвклидовой плоскости π соответствует одна определенная точка m' плоскости π';

2) двум любым различным точкам m_1 и m_2 плоскости π соответствуют две различные точки m_1' и m_2' плоскости π' (это следует из взаимной однозначности проективного отображения α);

3) какую бы точку m' на плоскости π' мы ни взяли, для нее найдется прообраз m в плоскости π;

4) трем любым точкам m_1, m_2, m_3 плоскости π, лежащим на одной прямой, соответствуют точки m_1', m_2', m_3' плоскости π', также лежащие на одной прямой, так как в отображении α трем прямым Sm_1, Sm_2, Sm_3 связки S, лежащим в одной плоскости, соответствуют прямые $S'm_1'$, $S'm_2'$, $S'm_3'$, также лежащие в одной плоскости.

Таким образом, отображение α^* плоскости π на плоскость π' есть аффинное отображение.

Предположим теперь, что существует другое проективное отображение β «проективной плоскости» S на «проективную плоскость» S', при котором «точки» A, B, C, D переходят соответственно в «точки» A', B', C', D'. Этому проективному отображению β соответствует аффинное отображение β^* плоскости π на плоскость π', определяемое так же, как и аффинное отображение α^*, соответствующее проективному отображению α. В аффинных отображениях α^* и β^* точкам c, d, e

плоскости π, не лежащим на одной прямой, соответствуют точки c', d', e' плоскости π', также не лежащие на одной прямой. Но существует только одно аффинное отображение эвклидовой плоскости π на эвклидову плоскость π', при котором трем точкам c, d, e плоскости π, не лежащим на одной прямой, соответствуют три точки c', d', e' плоскости π', также не лежащие на одной прямой.

Поэтому аффинное отображение α^* совпадает с аффинным отображением β^*.

Отсюда следует, что каждая прямая связки S, не лежащая в плоскости AB, имеет один и тот же образ в связке S' (не лежащей в плоскости $A'B'$) как при отображении α, так и при отображении β. Но это означает, что совпадают и проективные отображения α и β на множестве «точек» «проективной плоскости» S, не принадлежащих «прямой» AB.

Остается доказать, что отображения α и β совпадают и на множестве «точек» «прямой» AB, т. е. что каждой прямой связки S, лежащей в плоскости AB, соответствует при обоих отображениях α и β одна и та же прямая связки S', лежащая в плоскости $A'B'$. Возьмем в плоскости AB произвольную прямую M, принадлежащую связке S, и пусть P и Q — две различные прямые связки S, не лежащие в плоскости AB, но лежащие в одной плоскости с прямой M. Тогда в обоих отображениях α и β прямым P и Q соответствуют прямые P' и Q' связки S' и значит в обоих отображениях образом прямой M служит одна и та же прямая M', по которой пересекаются плоскости $A'B'$ и $P'Q'$.

Следствие. *Проективное преобразование плоскости, оставляющее неподвижными четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, есть тождественное преобразование.*

В самом деле: существует только одно проективное преобразование, переводящее четыре точки A, B, C, D (по три, не лежащие на одной прямой) в те же самые точки. Но таким преобразованием является тождественное преобразование.

п. 2. Вторая основная теорема

Теперь мы покажем, что изучение проективного отображения может быть сведено к изучению этого отображения в собственных точках проективной плоскости, а именно мы покажем, что всякое проективное отображение либо сводится к аффинному отображению, либо к последовательному применению движения и перспективного отображения.

Теорема II. *Пусть* Π *и* Π' — *проективные плоскости, полученные пополнением обыкновенных плоскостей* π *и* π' *эвклидова пространства несобственными элементами. Тогда всякое проективное отображение* Σ *плоскости* Π *на плоскость* Π' *либо сводится к аффинному отображению плоскости* π *на плоскость* π', *либо может быть осуществлено путем надлежащего перемещения плоскости* π *в пространстве и последующего перспективного отображения (из надлежащим образом выбранного центра перспективы* S), *перемещенной и пополненной несобственными элементами плоскости* π *на плоскость* Π'.

Доказательство.

1-й случай. Несобственная прямая плоскости Π' есть образ несобственной прямой плоскости Π. В этом случае совокупность собственных точек плоскости Π' есть образ совокупности собственных точек плоскости Π. Отображение σ обыкновенной плоскости π на обыкновенную плоскость π', соответствующее отображению Σ, является взаимнооднозначным, и всякие три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также лежащие на одной прямой. Следовательно, σ есть аффинное отображение плоскости π на плоскость π'. Это аффинное отображение σ плоскости π на плоскость π' вполне определяет проективное отображение проективной плоскости Π на проективную плоскость Π'.

В самом деле: аффинное отображение σ каждую прямую плоскости π переводит во вполне определенную прямую плоскости π' и, следовательно, пучок параллельных прямых плоскости π — во вполне определенный пучок параллельных же прямых плоскости π'. Тем самым устанавливается взаимнооднозначное отображение множества точек несобственной прямой плоскости Π на множество точек несобственной прямой плоскости Π'. Это последнее отображение несобственной прямой плоскости Π на несобственную прямую плоскости Π' вместе с отображением σ совокупности собственных точек плоскости Π на совокупность собственных точек плоскости Π' определяет проективное отображение Σ плоскости Π на плоскость Π'.

2-й случай. Несобственная прямая плоскости Π' есть образ собственной прямой d (с присоединенной к d ее несобственной точкой) плоскости Π.

Рассмотрим на плоскости Π какой-нибудь квадрат $ABCD$, вершины которого C и D лежат на прямой d. Так как другие две вершины A и B не лежат на прямой d, то их образами являются собственные точки A' и B' плоскости Π' (рис. 79).

Далее, прямые AC и BD плоскости П пересекаются в точке K, не лежащей на прямой CD; следовательно, при отображении Σ они переходят в прямые плоскости П′, пересекающиеся в собственной точке K'.

Точки C и D, как лежащие на прямой d, переходят при отображении Σ в несобственные точки C' и D' прямых $A'K'$ и $B'K'$.

Проведем через прямую $A'B'$ произвольную плоскость π_0 (рис. 80). На плоскости π_0 возьмем точки C_0D_0 так, чтобы четырехугольник $A'B'C_0D_0$ был квадратом. Проведем через точку C_0 прямую, параллельную прямой $B'K'$, а через точку D_0

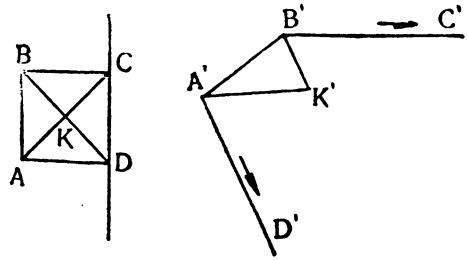


Рис. 79

прямую, параллельную прямой $A'K'$. Эти две прямые пересекаются в некоторой точке S. Примем эту точку S за центр перспективы. Тогда точки A', B', C_0, D_0 плоскости π_0, образующие квадрат, будут проектироваться в точки A', B', C', D' плоскости П′.

Пусть π^* — плоскость, параллельная плоскости π_0 и такая, что квадрат $A'B'C_0D_0$ проектируется из точки S на плоскость π^* в квадрат $A^*B^*C^*D^*$, равный квадрату $ABCD$. Передвинем плоскость П в пространстве так, чтобы вершины квадрата $ABCD$ совпали с соответственными вершинами квадрата $A^*B^*C^*D^*$ плоскости П*; плоскость П совпадет с плоскостью П*. Совмещение проективной плоскости П с проективной плоскостью П* мы понимаем в том смысле, что собственные точки этих плоскостей приводятся в соответствие ортогональным преобразованием, совмещающим обыкновенную плоскость π с обыкновенной плоскостью π^*. Отображение же несобственной прямой плоскости П на несобственную прямую плоскости П* осуществляется благодаря тому, что пучок параллельных прямых плоскости π, к которому присоединяется несобственная точка плоскости П, переходит при

ортогональном преобразовании во вполне определенный пучок параллельных прямых плоскости π^*, к которому однозначно присоединяется несобственная точка плоскости Π^*.

Обозначим через α отображение, совмещающее плоскость Π с плоскостью Π^*, а через β — перспективное отображение с центром в точке S плоскости Π^* на плоскость Π'. По-

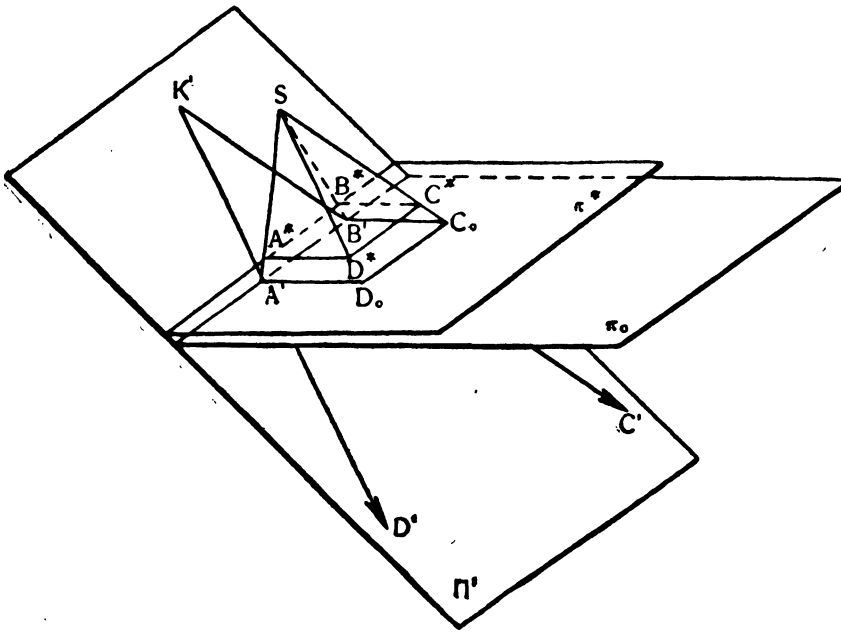


Рис. 80

следовательное применение отображений α и β так же, как и отображение Σ, переводит четыре точки A, B, C, D плоскости Π в четыре точки A', B', C', D' плоскости Π'.

Так как никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой так же, как и никакие три точки из четырех точек A', B', C', D' не лежат на одной прямой, то существует лишь одно проективное отображение, переводящее одну четверку точек в другую. Поэтому последовательные применения отображений α и β переводят каждую точку M плоскости Π в ту же точку M' плоскости Π', в которую точка M переводится отображением Σ.

Теорема полностью доказана.

п. 3. Приложения к аэрофотосъемке

Рассмотрим приложения доказанных теорем (п. 1 и п. 2) к оптическому трансформированию фотоснимков. Предположим, что с летящего самолета производится фотографирование местности. Если в момент экспозиции фотоаппарата его

Рис. 81

ось вертикальна, то изображение плоского куска местности на фотопленке подобно фотографируемому куску местности и фотография является хорошей картой местности. Однако вследствие неизбежной качки самолета ось фотоаппарата меняет свое направление и на фотопленке получаются различные перспективные изображения частей местности (рис. 81).

Фотографирование производится столь часто, что каждый следующий фотоснимок захватывает часть местности, заснятую на предыдущем снимке. Вследствие указанной причины полученные фотоснимки нуждаются в исправлении от искажений, внесенных креном самолета. Исправление фотоснимков осуществляют при помощи простого прибора, называемого

фототрансформатором (рис. 82): на негативе прокалывают какие-нибудь четыре точки, по три не лежащие на одной прямой, взаимное расположение которых на карте предварительно известно (например, дерево, колодезь, дом, фабричная

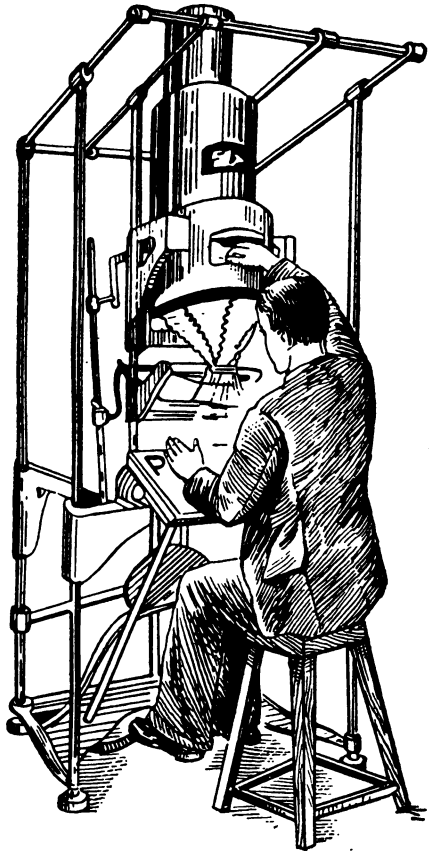


Рис. 82

труба), и поворачивают негатив так, чтобы лучи, падающие от точечного источника света, находящегося над негативом, проходя сквозь наколы, заняли те места, которые им соответствуют на карте и которые нанесены на специальном листе бумаги, лежащем под негативом. После того как совмещение известных четырех ориентиров (из которых никакие три не лежат на одной прямой) достигнуто, мы можем утверждать,

что оптически осуществлена перспектива, которая дает проективное отображение фотоснимка в истинную карту местности. Лист бумаги заменяют фотобумагой и изготовляют позитив в найденном положении негатива (освещая его сверху тем же точечным источником света). Полученные затем фотоснимки склеивают друг с другом по границам общих частей.

§ 36. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ

п. 1. Двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой

Одним из важных понятий проективной геометрии является двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой.

Мы введем это понятие, пользуясь первой моделью проективной плоскости, а затем распространим его и на вторую модель.

Возьмем на проективной плоскости П четыре различных точки A, B, C, D, лежащие на одной прямой. Предположим сначала, что все эти точки собственные. В этом случае двойным отношением $(ABCD)$ этих четырех точек, взятых в указанном порядке, называется число

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}.$$

Посмотрим, что происходит с двойным отношением, когда три точки, например A, B, C, остаются на месте, а четвертая точка D удаляется в бесконечность, т. е. длина AD стремится к ∞. Вычислим предел, к которому стремится тогда двойное отношение $(ABCD)$:

$$\lim_{D\to\infty}(ABCD) = \lim_{AD\to\infty}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\right) =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \lim_{AD\to\infty}\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Точно так же имеем:

$$\lim_{C\to\infty}(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DA}},$$

$$\lim_{B\to\infty}(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}},$$

$$\lim_{A\to\infty}(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Примем за значение $(ABCD)$ в том случае, когда одна из четырех точек A, B, C, D несобственная, предел двойного отношения четырех собственных точек, три из которых совпадают с собственными точками из числа точек A, B, C, D, а четвертая удаляется в бесконечность. Итак, если несобственной точкой является точка D, то по определению:

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}},$$

если C, то

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DA}},$$

если B, то

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}},$$

и, наконец, если несобственной точкой является точка A, то

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Мы видим, что в каждом из четырех рассмотренных случаев двойное отношение сводится к простому отношению трех оставшихся собственных точек. Случай, когда все четыре точки несобственные, мы рассмотрим позже.

п. 2. Двойное отношение четырех прямых, принадлежащих одному пучку

Возьмем четыре прямые a, b, c, d, принадлежащие одному пучку с центром в собственной точке S. Возьмем на прямых a, b, c, d соответственно собственные точки A, B, C, D, не совпадающие с S (рис. 83). Назовем *двойным отношением четырех прямых* a, b, c, d число

$$(abcd) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]},$$

где $[SAC]$, $[SCB]$, $[SAD]$ и $[SDB]$ — площади ориентированных треугольников SAC, SCB, SAD, SDB.

Это определение не зависит от выбора собственных точек A, B, C, D. Докажем, например, независимость от выбора точки D.

Возьмем на прямой d другую собственную точку D', отличную от D (и от S). Рассмотрим два случая:

I случай. Лучи SD и SD' имеют одинаковое направление (рис. 84). Тогда треугольники

$$SAD \text{ и } SAD',$$

так же, как и треугольники

$$SDB \text{ и } SD'B,$$

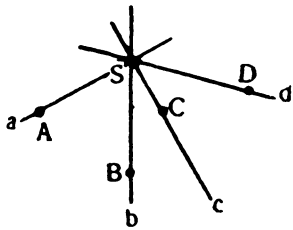


Рис. 83

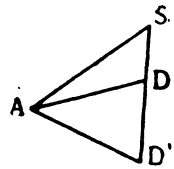


Рис. 84

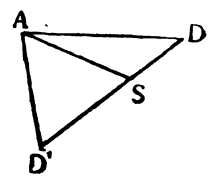


Рис. 85

имеют одинаковую ориентацию. Значит знаки отношений

$$\frac{[SAD]}{[SDB]} \text{ и } \frac{[SAD']}{[SD'B]}$$

одинаковы. Но и абсолютные величины этих отношений равны, так как:

$$\left|\frac{[SAD]}{[SDB]}\right| = \frac{\frac{1}{2} SA \cdot SD \cdot \sin \angle ASD}{\frac{1}{2} SB \cdot SD \cdot \sin \angle BSD} = \frac{SA \cdot \sin \angle ASD}{SB \cdot \sin \angle BSD},$$

$$\left|\frac{[SAD']}{[SD'B]}\right| = \frac{\frac{1}{2} SA \cdot SD' \cdot \sin \angle ASD'}{\frac{1}{2} SB \cdot SD' \cdot \sin \angle BSD'} = \frac{SA \cdot \sin \angle ASD}{SB \sin \angle BSD}.$$

II случай. Лучи SD и SD' имеют противоположные направления (рис. 85). В этом случае треугольники

$$SAD \text{ и } SAD',$$

так же, как и треугольники

$$SDB \text{ и } SD'B,$$

имеют противоположную ориентацию, поэтому знаки отношений

$$\frac{[SAD]}{[SDB]} \text{ и } \frac{[SAD']}{[SD'B]}$$

опять одинаковы. Что касается абсолютных значений этих отношений, то они равны между собой, и это доказывается так же, как и в первом случае.

Мы несколько отложим определение двойного отношения $(abcd)$ для того случая, когда эти четыре прямые проходят через одну и ту же несобственную точку.

Теорема. *Двойное отношение четырех точек собственной прямой равно двойному отношению перспективных* им прямых собственного пучка.*

Доказательство. I случай. Точки A, B, C, D — собственные. Тогда по определению:

$$(abcd) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]}.$$

Треугольники SAC и SCB имеют одну и ту же высоту. Если они одинаково ориентированы, то отношение $[SAC]:[SCB]$ положительно и равно отношению их оснований:

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} = \frac{AC}{CB} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}},$$

так как векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ в этом случае имеют одинаковое направление.

Если же треугольники SAC и SCB имеют противоположную ориентацию, то отношение $[SAC]:[SCB]$ отрицательно,

---

* Мы говорим, что четыре точки A, B, C, D одной прямой перспективны четырем прямым a, b, c, d пучка, если прямые a, b, c, d проходят соответственно через точки A, B, C, D. Мы говорим далее, что четыре точки A, B, C, D одной прямой перспективны четырем точкам A', B', C', D' другой прямой, если прямые AA', BB', CC' и DD', соединяющие соответственные точки данных прямых, проходят через одну точку (принадлежат одному пучку). Мы говорим, наконец, что четыре прямые, a, b, c, d одного пучка перспективны четырем прямым другого пучка, если точки пересечения соответствующих прямых (aa', bb', cc', dd') лежат на одной прямой.

а по абсолютной величине равно отношению их оснований, т. е.

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} = -\frac{AC}{CB} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}},$$

так как векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ в этом случае имеют противоположное направление.

Итак:

$$(abcd) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = (ABCD).$$

II случай. Одна из точек A, B, C, D несобственная. Предположим, например, что несобственной точкой является точка D. Тогда прямая d параллельна прямой ABC. Выберем на прямой d произвольную собственную точку D^*; по определению имеем:

$$(abcd) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD^*]}{[SD^*B]} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \left(-\frac{[ASD^*]}{[BSD^*]}\right) = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = (ABCD).$$

Аналогично доказывается, что

$$(abcd) = (ABCD),$$

если несобственной точкой является или точка A, или B, или C.

Следствие 1. *Если четыре прямые a, b, c, d собственного пучка прямых пересечены собственными прямыми l и l', то*

$$(ABCD) = (A'B'C'D'),$$

где A, B, C, D — точки пересечения прямых a, b, c, d с прямой l, а A', B', C', D' — точки пересечения прямых a, b, c, d с прямой l'.

Доказательство. На основании доказанной теоремы:

$$(ABCD) = (abcd),$$

$$(A'B'C'D') = (abcd),$$

следовательно,

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Следствие 2. *Если соответственные прямые a, b, c, d и a', b', c', d' двух четверок прямых, принадлежащих двум собственным пучкам, пересекаются в четырех точках A, B, C, D, лежащих на одной собственной прямой, то*

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

Доказательство. Каждое из двойных отношений $(abcd)$ и $(a'b'c'd')$ равно двойному отношению $(ABCD)$.

Теперь вернемся к определению двойного отношения. Мы не определили еще двойное отношение четырех точек A, B, C, D, лежащих на несобственной прямой, и двойное отношение четырех прямых a, b, c, d, проходящих через несобственную точку.

Назовем двойным отношением $(ABCD)$ четырех несобственных точек двойное отношение $(abcd)$ четырех прямых собственного пучка, проходящих соответственно через точки A, B, C, D. Это определение не зависит от выбора центра вспомогательного пучка, так как если мы возьмем четыре другие прямые a', b', c', d' собственного пучка с центром в точке S', то прямые a, b, c, d будут соответственно параллельны прямым a', b', c', d', а потому $(abcd) = (a'b'c'd')$.

Назовем двойным отношением $(abcd)$ четырех прямых несобственного пучка двойное отношение $(ABCD)$ четырех точек собственной прямой l, пересекающей прямые a, b, c, d соответственно в точках A, B, C, D.

Это определение не зависит от выбора вспомогательной собственной прямой l, так как если выбрать другую собственную прямую l', пересекающую прямые a, b, c, d соответственно в точках A', B', C', D', то уже простые отношения

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \quad \text{и} \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$$

не изменятся:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}, \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{A'D'}}{\overrightarrow{D'B'}},$$

а потому

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Теперь теорема этого пункта и оба ее следствия верны без всяких ограничений, а именно:

Двойное отношение четырех точек, лежащих на одной

прямой, равно двойному отношению четырех перспективных им прямых, принадлежащих одному пучку.

Если четыре точки одной прямой перспективны четырем точкам другой прямой, то двойные отношения этих четверок точек равны между собой.

Если четыре прямые одного пучка перспективны четырем прямым другого пучка, то двойные отношения этих четверок прямых равны между собой.

п. 3. Двойное отношение во второй модели

Определим теперь двойное отношение четырех «точек», лежащих на одной «прямой», и четырех «прямых», принадлежащих одному пучку, во второй модели.

Напомним, что «точками» в этом случае мы называем прямые некоторой связки S, а «прямыми» — плоскости той же связки. Условие того, что четыре «точки» лежат на одной «прямой», означает в этом случае то, что четыре прямые лежат в одной плоскости, проходящей через центр связки, и, следовательно, принадлежат одному пучку с центром в точке S. Поэтому в связи с предыдущим будет естественно определить двойное отношение четырех «точек», лежащих на одной «прямой», следующим образом: возьмем на каждой из прямых A, B, C, D, лежащих в плоскости π, точки K, L, M, N и положим:

$$(ABCD) = \frac{[SKM]}{[SML]} : \frac{[SKN]}{[SNL]},$$

где $[SKM]$, $[SML]$, $[SKN]$ и $[SNL]$ — площади ориентированных треугольников SKM, SML, SKN и SNL, лежащих в плоскости π. Независимость этого определения от выбора точек K, L, M, N по существу доказана в п. 2.

Двойным отношением четырех «прямых» одного пучка a, b, c, d назовем двойное отношение четырех «точек» A, B, C, D, перспективных этим «прямым». Независимость этого определения от выбора вспомогательной «прямой», на которой расположены «точки» A, B, C, D, устанавливается следующим образом: пусть A', B', C', D' — другая четверка «точек», лежащих на одной «прямой» и перспективных «прямым» a, b, c, d. Выберем на прямых A, B, C, D точки K, L, M, N и спроектируем их по направлению оси пучка, к которому принадлежат плоскости a, b, c, d, в плоскость, содержащую прямые A', B', C', D' (рис. 86). Тогда проекции K', L', M', N' точек K, L, M, N будут расположены соответственно на пря-

мых A', B', C', D'. Так как при параллельном проектировании отношение площадей ориентированных треугольников не меняется, то

$$\frac{[SKM]}{[SML]} : \frac{[SKN]}{[SNL]} = \frac{[SK'M']}{[SM'L']} : \frac{[SK'N']}{[SN'L']}.$$

Докажем теперь, что при взаимнооднозначном соответствии, установленном в предыдущем параграфе между множествами точек первой и второй модели проективной плоскости, двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой первой модели, равно двойному отношению четырех соответствующих «точек» (лежащих на одной «прямой») второй модели.

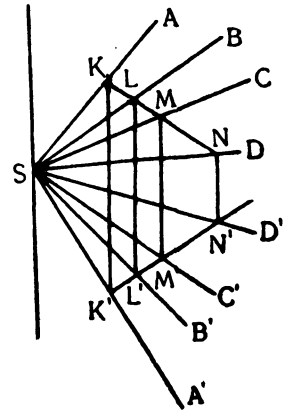


Рис. 86

В самом деле: если прямая, на которой расположены точки A, B, C, D, — собственная и этим точкам в связке соответствуют «точки» A^*, B^*, C^*, D^* (т. е. четыре прямые SA, SB, SC, SD связки, лежащие в одной плоскости связки, т. е. принадлежащие одному пучку), то соотношение

$$(ABCD) = (A^*B^*C^*D^*)$$

было уже доказано в п. 2. Если же прямая, на которой расположены точки A, B, C, D, — несобственная, то этим точкам соответствуют прямые связки, параллельные тем прямым первой модели, которые проходят через эти точки. Поэтому четыре прямые A^*, B^*, C^*, D^* связки, соответствующие точкам A, B, C, D, будут соответственно параллельны четырем прямым a^*, b^*, c^*, d^* собственного пучка первой модели, проходящим соответственно через точки A, B, C, D. Так как по определению

$$(ABCD) = (a^*b^*c^*d^*),$$

а

$$(A^*B^*C^*D^*) = (a^*b^*c^*d^*)$$

(в силу того, что $a^* \| A^*$, $b^* \| B^*$, $c^* \| C^*$, $d^* \| D^*$), то

$$(ABCD) = (A^*B^*C^*D^*).$$

Имеет место и следующая теорема:

Двойное отношение четырех прямых, проходящих через одну точку первой модели, равно двойному отношению четырех соответствующих им «прямых», проходящих через одну «точку» второй модели.

Доказательство этого положения аналогично предыдущему.

п. 4. Инвариантность двойного отношения при проективном отображении

Теорема. *Величина двойного отношения есть инвариант проективного отображения. Это значит, что если A, B, C, D — четыре точки, лежащие на одной прямой, и A', B', C', D' — их образы при проективном отображении Σ, то*

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Доказательство. На основании теоремы II § 35 проективное отображение Σ является произведением $\beta\alpha$ перспективы β на движение α. При движении α величина двойного отношения не меняется, так как оно сводится либо к отношению отрезков собственной прямой, либо к отношению площадей треугольников с вершинами в собственных точках. Сохранение простого отношения при перспективном отображении было установлено выше (конец п. 2).

§ 37. ГАРМОНИЗМ

п. 1. Определения и примеры

Мы говорим, что четыре точки A, B, C, D, лежащие на одной проективной прямой, образуют гармоническую четверку, если двойное отношение этих четырех точек равно -1:

$$(ABCD) = -1.$$

В этом случае говорят также, что точка D является четвертой гармонической к точкам A, B, C. Аналогично мы будем говорить, что четыре прямые a, b, c, d, принадлежащие одному пучку, образуют гармоническую четверку или что прямая d является четвертой гармонической к прямым a, b, c, если двойное отношение $(abcd)$ равно -1:

$$(abcd) = -1.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Если A и B — собственные точки и C — середина отрезка AB, то четвертой гармонической к трем точкам A, B, C является несобственная точка D прямой AB. В самом деле: в этом случае (см. § 36, п. 1):

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -1.$$

Обратно, если $(ABCD) = -1$ и D — несобственная точка прямой AB, то C является серединой отрезка AB, так как из соотношения

$$(ABCD) = -\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -1$$

следует $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, а это и означает, что точка C — середина отрезка AB.

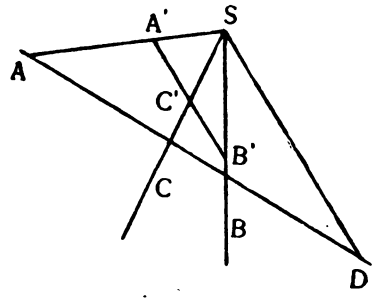


Рис. 87

Пример 2. A, B, C, D—четыре собственные точки проективной прямой, образующие гармоническую четверку. Выберем на проективной плоскости произвольную собственную точку S, не лежащую на прямой $ABCD$, и соединим ее с точками A, B, C, D. Проведем прямую l, параллельную прямой SD. Пусть эта прямая пересекает прямые SA, SC и SB соответственно в точках A', C' и B'. Тогда C' — середина отрезка $A'B'$.

В самом деле:

$$-1 = (ABCD) = (A'B'C'D'),$$

где D' — несобственная точка прямой l. Отсюда и следует, что C' — середина отрезка $A'B'$ (см. предыдущий пример) (рис. 87).

Пример 3. Непараллельные прямые a и b и две биссектрисы c и d углов между ними образуют гармоническую четверку, т. е.

$$(abcd) = -1.$$

В самом деле: проведем прямую l, параллельную биссектрисе d. Пусть A, B, C, D — точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d (D — несобственная точка). Тогда $AC = CB$ и, следовательно, $(ABCD) = -1$, поэтому и $(abcd) = -1$ (рис. 88).

Этот факт можно установить и иначе. Проведем прямую l',

пересекающую все прямые a, b, c, d соответственно в собственных точках A, B, C, D. По теореме о биссектрисе внутреннего и внешнего угла треугольника имеем (рис. 89):

$$\frac{AC}{CB} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{AS}{SB},$$

$$\frac{AD}{DB} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{AS}{SB},$$

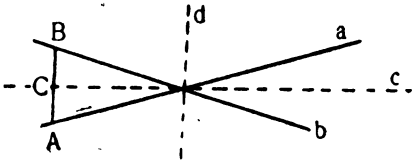


Рис. 88

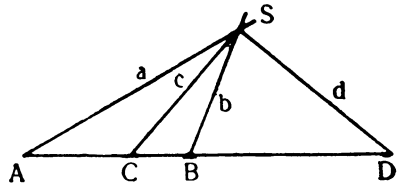


Рис. 89

откуда

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1.$$

Пример 4. Если четыре собственные точки A, B, C, D одной прямой образуют гармоническую четверку, то середина отрезка CD лежит вне отрезка AB. Если при этом точка C делит отрезок AB в отношении λ, то середина H отрезка CD делит отрезок AB в отношении $-\lambda^2$.

В самом деле: примем прямую $ABCD$ за ось абсцисс и пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — соответственно координаты точек A, B, C, D. Тогда, полагая, что точка C делит отрезок AB в отношении λ:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \lambda,$$

из соотношения

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1$$

находим

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\lambda,$$

т. е. точка D делит отрезок AB в отношении $-\lambda$. Теперь по формулам деления отрезка в данном отношении мы можем выразить абсциссы точек C и D через абсциссы точек A и B и число λ:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$x_4 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda},$$

откуда абсцисса x_5 середины H отрезка CD будет

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{x_1 - \lambda^2 x_2}{1 - \lambda^2},$$

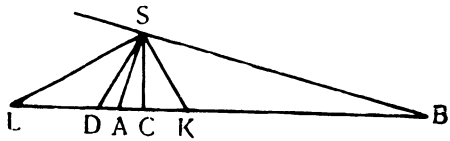


Рис. 90

отсюда и следует, что точка H делит отрезок AB в отношении $-\lambda^2$, а потому точка H лежит вне отрезка AB.

Пример 5. Рассмотрим прямоугольный треугольник ASB с прямым углом при вершине S (рис. 90). Проведем в нем высоту SC и биссектрисы SK и SL угла ASB и угла, смежного с ним. Пусть SD — медиана треугольника LSK*. Тогда точка D — четвертая гармоническая к точкам A, B и C.

В самом деле:

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} = \frac{AS}{SB} = \lambda,$$

$$\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LB}} = -\frac{AS}{SB} = -\lambda,$$

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{AS^2}{BS^2} = \lambda^2.$$

Так как D — середина отрезка KL, то

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -\lambda^2,$$

* Мы предполагаем, что $SA \neq SB$.

следовательно,

$$(ABKL) = -1.$$

Пример 6. Если четыре собственные точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку и точка O — середина отрезка AB, то

$$OC \cdot OD = OA^2.$$

В самом деле: принимая точку O за начало координат, будем иметь

$$O(0), \quad A(a), \quad B(-a), \quad C(c), \quad D(d)$$

и далее

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{c-a}{-a-c} : \frac{d-a}{-a-d} = -1,$$

откуда

$$a^2 = cd.$$

Пример 7. Если четыре собственные точки образуют гармоническую четверку, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right),$$

где $\rho = AB$, $\rho_1 = AC$, $\rho_2 = AD$ (рис. 91).

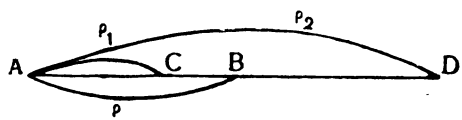


Рис. 91

В самом деле: примем точку A за начало координат; обозначая координаты точек B, C, D соответственно через ρ, ρ_1 и ρ_2, имеем

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\rho_1}{\rho-\rho_1} : \frac{\rho_2}{\rho-\rho_2} = -1,$$

откуда

$$\frac{\rho_1}{\rho-\rho_1} = -\frac{\rho_2}{\rho-\rho_2}, \quad \rho_1\rho + \rho_2\rho = 2\rho_1\rho_2$$

или

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right).$$

Пример 8. Диагонали a и b параллелограмма и две прямые c и d, проходящие через точку пересечения диагоналей параллельно сторонам параллелограмма, образуют гармоническую четверку (рис. 92).

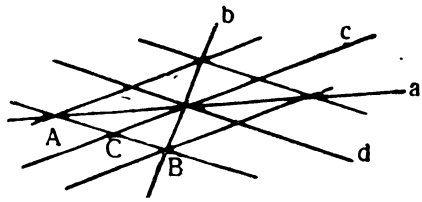


Рис. 92

В самом деле: четыре точки A, B, C, D, в которых прямые a, b, c, d пересекают сторону u параллелограмма, образуют гармоническую четверку (D — несобственная точка прямой u, C — середина отрезка AB), поэтому и четверка прямых a, b, c, d — гармоническая.

п. 2. Способы построения четвертой гармонической к трем данным точкам

Построение точки D четвертой гармонической к трем данным точкам A, B и C, лежащим на одной прямой, может быть осуществлено различными способами.

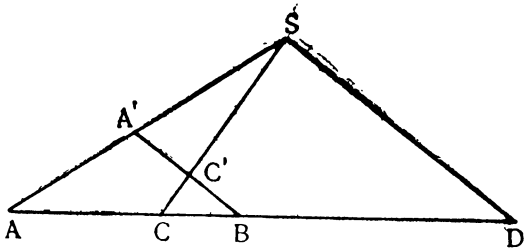


Рис. 93

1°. Пусть на прямой даны три точки A, B, C. Проведем через точку B произвольную прямую и отложим на ней равные отрезки $BC'=C'A'$.

Пусть S — точка (собственная или несобственная) пересечения прямых CC' и AA'. Проведем через точку S прямую, параллельную BA', и пусть D — точка встречи этой прямой с прямой AB. Тогда D — четвертая гармоническая к точкам A, B, C (рис. 93).

2°. Пусть на прямой даны три точки A, B, C. Построим окружность произвольного радиуса, проходящую через точки A и B. Пусть K — середина дуги AB, а L — точка, в которой прямая KC пересекает построенную окружность второй раз. Наконец, через точку L проводим прямую, перпендикулярную прямой KL; эта прямая пересечет прямую AB в точке D, четвертой гармонической к точкам A, B, C (рис. 94).

В самом деле: $\angle ALK = \angle KLB$; следовательно, LK — биссектриса внутреннего угла ALB, а LD — биссектриса внешнего угла треугольника ALB (см. п. 1, пример 3).

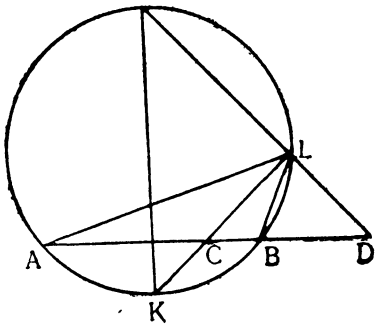


Рис. 94

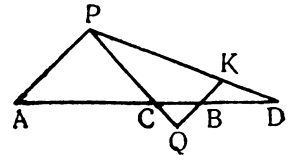


Рис. 95

3°. Проведем через точки A и B две параллельные прямые. Пусть P и Q точки, в которых пересекает эти прямые произвольная прямая, проходящая через точку C. На прямой QB отложим от точки B отрезок $BK = BQ$. Прямая PK пересечет прямую AB в точке D, являющейся четвертой гармонической к точкам A, B, C (рис. 95). В самом деле: несобственная точка прямой QK и точки B, Q, K образуют гармоническую четверку (так как $QB = BK$); но эти точки из точки P на прямую AB проектируются в точки A, B, C, D, а двойное отношение, следовательно, и гармонизм при проектировании не меняются.

п. 3. Полный четырехсторонник и полный четырехвершинник

Полным четырехсторонником называется совокупность четырех прямых проективной плоскости, из которых никакие три не проходят через одну точку. Эти прямые называются *сторонами* полного четырехсторонника, а шесть точек пересечения этих сторон, взятых попарно, называются *вершинами* этого четырехсторонника. Две вершины, не лежащие на одной стороне, называются *противоположными*. В полном четы-

рехстороннике имеются три пары противоположных вершин (рис. 96): *ab* и *cd*, *bc* и *da*, *bd* и *ac*.

Прямые *k*, *l*, *m*, соединяющие противоположные вершины, называются *диагоналями*, а точки их взаимного пересечения — *диагональными точками*. На каждой диагонали полного четырехсторонника имеются две вершины и две диагональные точки.

Теорема. *Две противоположные вершины полного четырехсторонника и две диагональные точки, лежащие на диагонали, проходящей через эти вершины, образуют гармоническую четверку.*

Доказательство. Мы дадим геометрическое доказательство, пользуясь первой моделью проективной плоскости. Предположим сначала, что одна из диагоналей, напри-

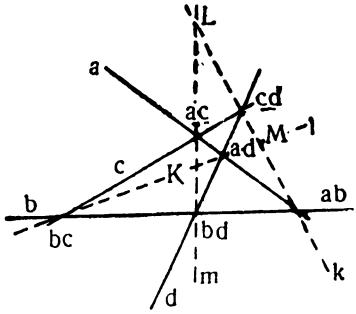


Рис. 96

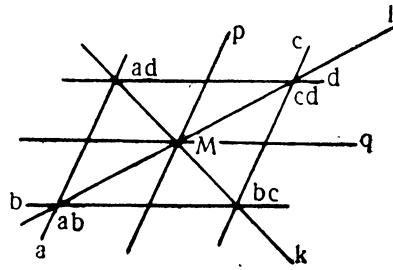


Рис. 97

мер *m*, — несобственная прямая. Тогда данный четырехсторонник обращается в параллелограмм, точка *L* — несобственная, а точка *M* — середина отрезка с концами в точках *ab* и *cd* (рис. 97) и, таким образом, четыре точки *ab*, *cd*, *M* и *L* образуют гармоническую четверку.

Точно так же четверка точек *ad*, *bc*, *M*, *K* является гармонической. Наконец, четыре точки *ac*, *bd*, *K*, *L* образуют гармоническую четверку, так как по определению их двойное отношение равно двойному отношению четырех лучей *p*, *q*, *k*, *l*, а это отношение равно —1 (см. п. 1, пример 8).

Пусть теперь все три диагонали — собственные прямые. Тогда из трех диагональных точек по крайней мере две собственные. Пусть это будут, например, *K* и *L*. Рассмотрим наряду с плоскостью П, соответствующей эвклидовой плоскости π, другую проективную плоскость П′, соответствующую эвклидовой плоскости π′, параллельной прямой *k*, но не па-

раллельной плоскости π. Выберем точку S так, чтобы плоскость, проходящая через точку S и прямую k, была бы параллельна плоскости π'. Тогда, если спроектировать четырехсторонник $a\ b\ c\ d$ из центра S в плоскость Π', то в проекции получим четырехсторонник $a'\ b'\ c'\ d'$ такой, что его стороны a' и b' будут параллельны прямой, соединяющей точку S с вершиной ab, а стороны c' и d' будут параллельны прямой, соединяющей точку S с вершиной cd. Значит четырехсторонник $a\ b\ c\ d$ спроектируется в параллелограмм $a'\ b'\ c'\ d'$, причем прямая k спроектируется в несобственную прямую плоскости Π'.

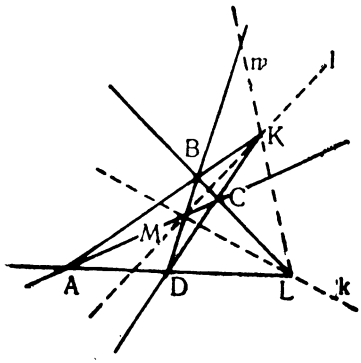


Рис. 98

Так как для четырехсторонника $a'\ b'\ c'\ d'$ теорема уже доказана и так как по доказанному перспектива сохраняет двойное отношение, а следовательно, и гармонизм, то теорема верна и для четырехсторонника $a\ b\ c\ d$.

Назовем *четырехвершинником* совокупность четырех точек проективной плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Эти точки называются *вершинами* полного четырехвершинника, а шесть прямых, соединяющих попарно вершины, называются его *сторонами*. Две стороны, не проходящие через одну вершину, называются *противоположными*. В полном четырехвершиннике $A\ B\ C\ D$ имеются три пары противоположных сторон: AB и CD, BC и DA, BD и AC.

Точка пересечения противоположных сторон четырехвершинника называется его *диагональной точкой* (рис. 98). Четырехвершинник имеет три диагональные точки K, L, M. Прямые, проходящие через диагональные точки, взятые попарно, называются *диагоналями*. Всякий четырехвершинник имеет три диагонали. Таким образом, через каждую диагональную точку полного четырехвершинника проходят две (противоположные) стороны и две диагонали.

Теорема. *Две противоположные стороны и две диагонали полного четырехвершинника, проходящие через одну его диагональную точку, образуют гармоническую четверку.*

Доказательство. Докажем, например, что четыре прямые KA, KD, KM и KL образуют гармоническую четверку

(рис. 99). Для этого рассмотрим четырехсторонник $a^*b^*c^*d^*$ (a^* — это прямая AB, b^* — прямая BC, c^* — прямая CD и d^* — прямая DA). Для него точки K и L — вершины, а потому K, L, L^*, K^* — гармоническая четверка (K^* и L^* — диагональные точки полного четырехсторонника $a^*b^*c^*d^*$).

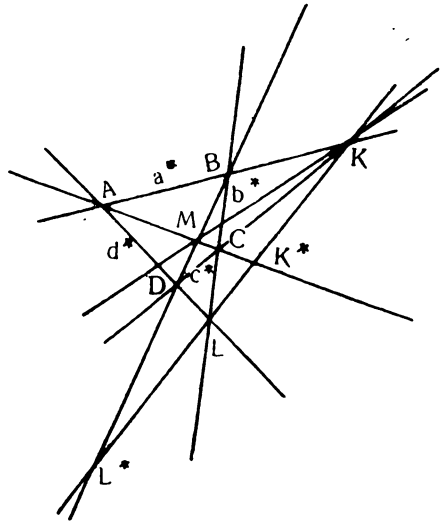


Рис. 99

Так как четверка точек A, C, M, K^* перспективна четверке точек K, L, L^*, K^*, то четверка точек A, C, M, K^* гармоническая, поэтому и четверка прямых KA, KC, KM, KL также гармоническая.

Замечание. Эту теорему можно доказать и независимо от теоремы о полном четырехстороннике аналогично тому, как была доказана эта последняя.

§ 38. ПРИМЕРЫ ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

п. 1. Гиперболическая гомология

Определение. Проективное преобразование, при котором имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек, и неподвижная точка P, не лежащая на прямой p, называется *гиперболической гомологией.*

Прямая p называется *осью гомологии;* точка P — *центром гомологии.*

Из определения гиперболической гомологии непосредственно следует, что образ A' всякой точки A лежит на пря-

мой PA. В самом деле: пусть K — точка пересечения прямой AP с осью гомологии p. Так как точки P и K остаются в преобразовании гиперболической гомологии неподвижными, то три точки P, K и A, лежащие на одной прямой, переходят в три точки P, K и A', также лежащие на одной прямой.

Теорема. *Существует и притом только одна гиперболическая гомология с данным центром P, с данной осью p и парой соответственных точек A и A' (таких, что прямая AA' проходит через точку P).*

Доказательство. Возьмем на прямой p две точки C и D такие, что никакие три из четырех точек P, A, C, D не лежат на одной прямой. Тогда никакие три из четырех точек P, A', C, D также не будут лежать на одной прямой. Существует и притом только одно проективное преобразование, которое точки P, A, C, D переводит в точки P, A', C, D. Докажем, что это проективное преобразование есть гомология с центром P и осью p. Для этого достаточно только доказать, что все точки прямой p остаются неподвижными.

Пусть K — точка пересечения прямой PA с прямой p. Так как точка A' лежит на прямой PA, то прямая PA переходит в себя; прямая CD (т. е. p) также переходит в себя; следовательно, K — неподвижная точка в рассматриваемом проективном преобразовании. Итак, на прямой p имеются три неподвижные точки C, D и K. Отсюда в силу сохранения двойного отношения при проективном преобразовании следует, что любая точка прямой p неподвижна в построенном проективном преобразовании, и значит последнее является гомологией с центром P и осью p.

Для построения образа B' произвольной точки B в гиперболической гомологии с центром P, осью p и парой соответственных точек A, A' соединяем точку A с точкой B; пусть M — точка пересечения AB с прямой p. Тогда точка B' пересечения прямых PB и MA' будет образом точки B (рис. 100).

Гиперболическую гомологию можно осуществить при помощи перспективы и поворота плоскости около прямой.

Пусть эвклидовы плоскости π и π^*, которым соответствуют проективные плоскости Π и Π^*, пересекаются по прямой p. Рассмотрим перспективное отображение плоскости Π на плоскость Π^* с центром перспективы в точке S (рис. 101). Пусть M — произвольная точка плоскости Π, а M^* — ее образ в установленном перспективном отображении плоскости Π на плоскость Π^*.

Повернем плоскость Π^* вокруг прямой p так, чтобы она совпала с плоскостью Π. Обозначим через M' ту точку плос-

кости П, в которую после поворота перейдет * точка M^* плоскости $П^*$.

Описанное преобразование поворота есть проективное отображение проективной плоскости $П^*$ на проективную плоскость П.

Поставим теперь в соответствие точке M проективной плоскости П точку M' той же плоскости. Полученное соответствие есть проективное преобразование плоскости П, в котором имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек.

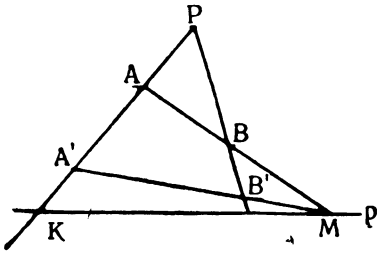


Рис. 100

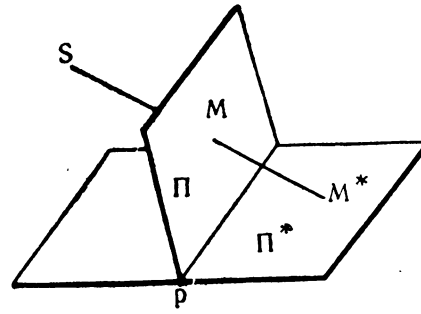


Рис. 101

Докажем, что в этом соответствии имеется еще одна неподвижная точка, не лежащая на прямой p. Для этого опустим из точки S перпендикуляры на плоскости μ и ν, являющиеся биссекториальными плоскостями для плоскостей π и π^* (рис. 102). Пусть перпендикуляр из точки S на плоскость μ пересекает плоскости π и π^* в точках P и P^*, а перпендикуляр, опущенный из точки S на плоскость ν, пересекает плоскости π и π^* соответственно в точках Q и Q^*. Тогда при совмещении плоскости π^* с плоскостью π поворотом вокруг прямой p либо точка P совпадает с точкой P^*, либо точка Q совпадает с точкой Q^*. Таким образом, точка P (или Q) и будет неподвижной точкой указанного проективного преобразования плоскости π.

---

* Если M^*—несобственная точка плоскости $П^*$, то она присоединена к некоторому пучку параллельных прямых плоскости π^*; при указанном совмещении этот пучок переходит в некоторый пучок параллельных прямых плоскости π; пусть M' — несобственная точка плоскости П, присоединяемая к параллельным прямым этого последнего пучка. Эту несобственную точку M' мы и ставим в соответствие точке M^* в преобразовании поворота.

Точка P (или Q) является единственной неподвижной точкой (не лежащей на прямой p) рассматриваемого проективного преобразования σ плоскости Π, так как при любом другом расположении проектирующего луча точки M и M^* пересечения этого луча с плоскостями Π и Π^* либо не будут лежать в плоскости, перпендикулярной к прямой p, либо будут находиться от прямой p на разных расстояниях; поэтому при совмещении плоскости Π^* с плоскостью Π поворотом вокруг прямой p точка M^* совместится с точкой M', отличной от точки M.

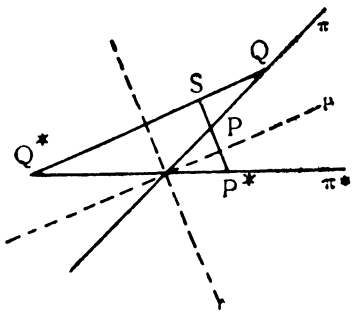


Рис. 102

Итак, в проективном преобразовании σ плоскости Π имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек, и неподвижная точка P, не лежащая на прямой p.

Докажем, что и обратно: если в некотором проективном преобразовании σ имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек, и еще одна неподвижная точка P, не лежащая на этой прямой, то такое проективное преобразование σ получается в результате последовательного выполнения двух отображений:

1) перспективного отображения β плоскости Π на некоторую плоскость Π^*, проходящую через прямую p;

2) поворота α плоскости Π^* вокруг прямой p, совмещающего плоскость Π^* с плоскостью Π.

Доказательство. Обозначим через Π^* плоскость, проходящую через неподвижную прямую p. Пусть M — произвольная точка плоскости Π, а M' — ее образ в преобразовании σ. Обозначим через α поворот вокруг прямой p, совмещающий плоскость Π^* с плоскостью Π, и пусть M' — образ точки M^* при этом повороте. Обозначим, наконец, через β отображение плоскости Π на плоскость Π^*, при котором точке M ставится в соответствие точка M^*, т. е. $M^*=\beta(M)$. Это отображение проективно, так как оно получается в результате последовательного применения проективного преобразования $[M'=\sigma(M)]$ и поворота, совмещающего плоскость Π с Π^*.

Докажем, что отображение β есть перспективное отображение плоскости Π на плоскость Π^*. Пусть A, B, C — три произвольные точки плоскости Π, а A', B' и C' — их образы при преобразовании σ (рис. 103). Тогда прямые AC и $A'C'$,

BC и $B'C'$, AB и $A'B'$ пересекаются в точках G, H, F, лежащих на прямой p.

В самом деле: пусть F — точка, в которой прямая AB пересекает прямую p. Так как F — неподвижная точка проективного преобразования σ, то прямая $A'B'$, являющаяся образом прямой AB, будет проходить через точку F. Аналогично

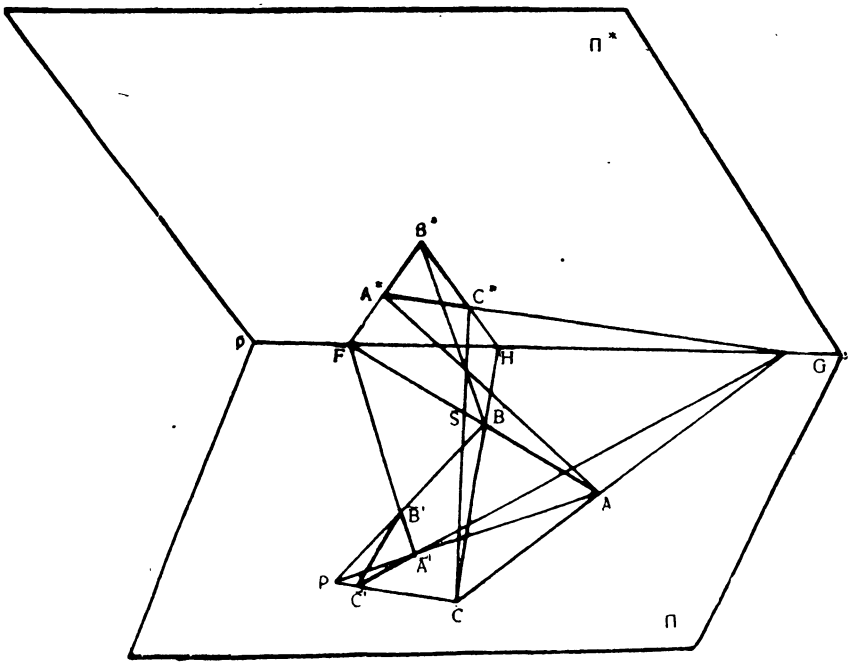


Рис. 103

убеждаемся в том, что прямые AC и $A'C'$ пересекаются в точке G, лежащей на прямой p, а прямые BC и $B'C'$ пересекаются в точке H той же прямой p.

Пусть при повороте α точки A', B', C' перейдут соответственно в точки A^*, B^* и C^*. Прямые A^*B^*, A^*C^* и B^*C^* будут по-прежнему проходить через точки F, G, H. Поэтому прямые AA^* и BB^* лежат в одной плоскости, прямые AA^* и CC^* лежат в одной плоскости и прямые CC^* и BB^* лежат в одной плоскости. Эти три плоскости всегда имеют единственную общую точку S. Действительно, если бы мы имели $AA^* \| BB^* \| \| CC^*$, то отображение β было бы аффинным.

В самом деле: возьмем на прямой p точку R, отличную от F, G и H. Никакие три из четырех точек A, B, C, R не лежат на одной прямой; никакие три из четырех точек A^*, B^*, C^*, R также не лежат на одной прямой. Параллельное проектирование β^* плоскости Π на Π^* по направлению AA^* так же, как и проективное преобразование β, точкам A, B, C, R ставит в соответствие точки A^*, B^*, C^*, R, а потому $\beta=\beta^*$. Из того, что β — аффинное отображение, следует, что преобразование σ является аффинным. Но не тождественное аффинное преобразование, оставляющее на месте все точки некоторой прямой p, не может иметь других неподвижных точек. А мы предположили, что отображение σ имеет неподвижную точку P, не лежащую на прямой p. Таким образом, предположение $AA^*||BB^*||CC^*$ приводит к противоречию; но прямые AA^* и BB^* лежат в одной плоскости, а так как они не параллельны, то они пересекаются в некоторой точке S; прямая CC^* пройдет через эту точку S, так как она лежит в одной плоскости с прямой AA^* и пересекается с этой прямой.

Докажем, наконец, что β есть перспективное отображение плоскости Π на Π^*. Перспективное отображение β^{**} с центром перспективы S так же, как и проективное отображение β, переводит точки A, B, C, R в точки A^*, B^*, C^*, R, поэтому $\beta=\beta^{**}$.

Таким образом, мы показали, что проективное преобразование σ, оставляющее на месте все точки прямой p и точку P, не лежащую на прямой p, сводится к последовательному выполнению перспективного отображения β плоскости Π на плоскость Π^* и повороту α вокруг прямой p, совмещающему плоскость Π^* с плоскостью Π.

Таким образом, предыдущие рассуждения позволяют утверждать, что *всякая гиперболическая гомология плоскости* Π *с осью* p *и центром* P *может быть рассматриваема как результат перспективного отображения плоскости* Π *на плоскость* Π^*, *проходящую через прямую* p, *и последующего отображения плоскости* Π^* *на плоскость* Π, *осуществляемого поворотом плоскости* Π^* *вокруг прямой* p, *совмещающим плоскость* Π^* *с плоскостью* Π.

Гиперболическая гомология может быть получена также в результате двух перспективных отображений. В самом деле: пусть на плоскости Π задана гиперболическая гомология с центром P и осью p. Проведем через прямую p плоскость Π^* и на прямой, проходящей через точку P и не лежащей в плоскости Π, возьмем две точки S_1 и S_2, ни одна из которых не лежит в плоскости Π^* (рис. 104). Отобразим перспективно

плоскость П на плоскость П* с центром перспективы S_1, а затем отобразим перспективно плоскость П* на плоскость П из центра S_2.

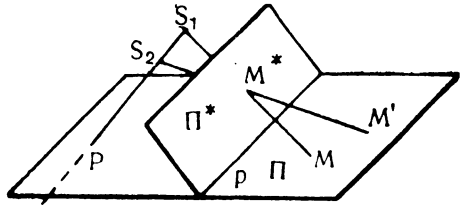


Рис. 104

В результате этих двух перспективных отображений мы получим проективное преобразование плоскости П, которое является гиперболической гомологией, так как при этом преобразовании все точки прямой p неподвижны; неподвижной является также и точка P пересечения прямой S_1S_2 с плоскостью П.

п. 2. Параболическая гомология

Рассмотрим два перспективных отображения: плоскости П на плоскость П* с центром S_1 и плоскости П* на плоскость П с центром S_2. Предположим, что прямая S_1S_2 пересекает прямую p, по которой пересекаются плоскости П и П*, в точке P (рис. 105). В результате этих двух перспективных отображений мы получим проективное преобразование плоскости П. В этом преобразовании неподвижными будут точки прямой p и только эти точки. При этом, однако, точка P, в которой прямая S_1S_2 пересекает прямую p, играет особую роль: через нее проходят все прямые MM', соединяющие соответствующие друг другу точки в преобразовании плоскости П.

Определение. *Проективное преобразование, при котором имеется прямая p, состоящая из неподвижных точек, и никаких других неподвижных точек нет, называется параболической гомологией, а прямая p — осью гомологии* (рис. 106).

Теорема 1. *Все прямые, соединяющие соответственные точки в параболической гомологии, проходят через одну и ту же точку, лежащую на оси гомологии.*

Доказательство. Пусть A — какая-нибудь точка плоскости П, не лежащая на прямой p, а A' — ее образ при параболической гомологии γ; обозначим через P точку, в которой прямая AA' пересекает ось гомологии p. Пусть B — лю-

бая другая точка плоскости П, не лежащая на прямой p, а B' — ее образ в параболической гомологии γ.

Докажем, что прямая BB' также пройдет через точку P. Предположим противное, т. е. существует точка B такая, что прямая BB' пересекается с прямой AA' в некоторой точке S, не лежащей на оси p (рис. 107). Тогда гиперболическая гомология δ с центром S и осью p, переводящая точку A в точку A', будет переводить точку B в точку B'. Возьмем на прямой p две точки C и D такие, что из четырех точек A, B, C, D

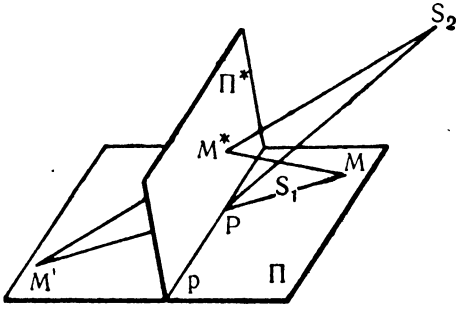


Рис. 105

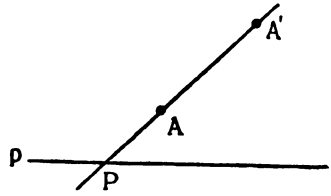


Рис. 106

никакие три не лежат на одной прямой. Мы видим, что гиперболическая гомология δ с центром S и осью p так же, как и параболическая гомология γ, точки A, B, C, D переводит соответственно в точки A', B', C, D. Но основная теорема проективной геометрии (см. § 35, теорема I) утверждает, что существует только одно проективное преобразование, переводящее четыре данные точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой, в точки A', B', C, D, из которых никакие три также не лежат на одной прямой. В силу этой теоремы данная параболическая гомология γ должна была бы совпадать с гиперболической гомологией δ с осью p и центром S, не лежащим на оси p, а значит параболическая гомология γ имела бы неподвижную точку S, не лежащую на прямой p. Полученное противоречие доказывает, что любая прямая BB' проходит через точку P (лежащую на прямой p).

Точка P, лежащая на оси гомологии, через которую проходят все прямые, соединяющие соответственные точки в параболической гомологии, называется *центром параболической гомологии.*

Теорема 2. *Существует и притом только одна параболическая гомология с данной осью p, с данным центром P (лежащим на оси p) и данной парой соответственных точек A и A′ (таких, что прямая AA′ проходит через точку P).*

Доказательство. Возьмем на прямой p произвольную точку K, отличную от P. Соединим точку K с точками A и A'; проведем через точку P произвольную прямую и обозначим через B и B' точки ее пересечения с прямыми KA и KA'

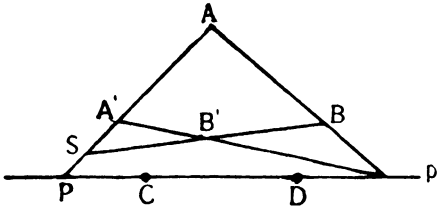


Рис. 107

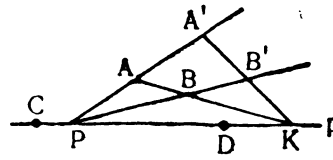


Рис. 108

(рис. 108). Возьмем на прямой p точки C и D такие, что никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежали бы на одной прямой. Тогда никакие три из четырех точек A', B', C, D также не лежат на одной прямой. Существует и притом только одно проективное преобразование γ, которое точки A, B, C, D переводит в точки A', B', C, D. При этом преобразовании точки C, D и K неподвижны, следовательно, будут неподвижны и все точки прямой p, в том числе и точка P. В этом преобразовании никаких других неподвижных точек нет, так как если бы была еще одна неподвижная точка P^*, то рассматриваемое преобразование было бы гиперболической гомологией с осью p и центром P^*, но тогда прямые AA' и BB' должны были бы пересекаться в точке P^*.

Итак, мы доказали, что построенное проективное преобразование γ есть параболическая гомология с осью p и центром P (лежащим на оси p), переводящая точку A в точку A'.

п. 3. Гиперболическая и параболическая гомологии во второй модели

а) Гиперболическая гомология

Будем интерпретировать проективную плоскость как связку прямых и плоскостей. Тогда гиперболическая гомология оказывается таким преобразованием связки, при котором:

1) трем любым прямым связки, лежащим в одной плоскости, соответствуют три прямые этой связки, также лежащие в одной плоскости (условие проективности преобразования);

2) каждая прямая связки, лежащая в некоторой плоскости p («ось гомологии») связки, переходит в себя;

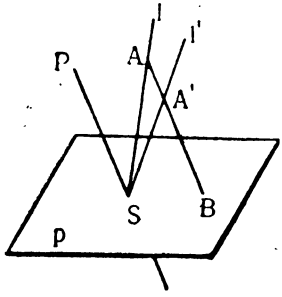


Рис. 109

3) существует прямая P («центр гомологии») связки, не лежащая в плоскости p и переходящая в себя.

Какова бы ни была гиперболическая гомология, интерпретируемая во второй модели, существует аффинное преобразование пространства, оставляющее на месте точку S и порождающее эту гомологию. Это аффинное преобразование есть либо косое сжатие к плоскости p по направлению прямой P, либо косая симметрия относительно плоскости p по направлению прямой P, либо представляется в виде произведения этих преобразований (рис. 109).

Обратно: любое из этих аффинных преобразований пространства порождает гиперболическую гомологию.

Рис. 100 можно рассматривать как сечение связки S плоскостью П, не проходящей через точку S. В самом деле: секущая плоскость прямую P (рис. 109) пересекает в точке P (рис. 100), а плоскость p (рис. 109) по прямой p (рис. 100).

Далее, так как прямые P, SA и SA' (рис. 109) лежат в одной плоскости, то точки P, A и A' лежат на одной прямой (рис. 100).

б) параболическая гомология

Будем опять интерпретировать проективную плоскость как связку S.

Тогда параболическая гомология оказывается таким преобразованием этой связки, при котором:

1) трем любым прямым связки, лежащим в одной плоскости, соответствуют три прямые этой связки, также лежащие в одной плоскости (условие проективности преобразования);

2) каждая прямая связки, лежащая в некоторой плоскости p («ось гомологии»), переходит в себя;

3) никаких других прямых связки, переходящих в себя, нет.

Какова бы ни была параболическая гомология, интерпретируемая во второй модели, существует аффинное преобразование пространства, оставляющее на месте точку S и порождающее эту гомологию; это аффинное преобразование

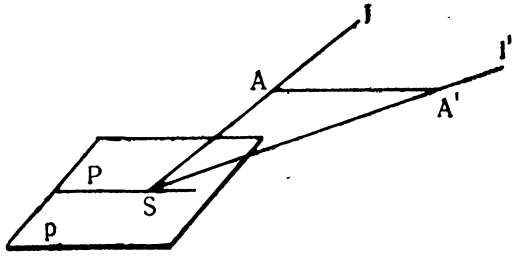


Рис. 110

есть сдвиг* относительно плоскости p по направлению некоторой прямой P («центр гомологии») связки, лежащей в плоскости p.

Обратно: сдвиг пространства относительно плоскости p связки по направлению прямой P связки, лежащей в плоскости p, порождает параболическую гомологию.

Рис. 106 можно рассматривать как сечение связки S (рис. 110) плоскостью П.

п. 4. Частные случаи гиперболической и параболической гомологии (первая модель)

Отметим некоторые частные случаи гиперболической и параболической гомологии, когда ось или центр гомологии (или и ось, и центр) являются несобственными элементами.

1°. *Если центр P гиперболической гомологии есть собственная точка, а ось гиперболической гомологии — несобственная прямая, то эта гиперболическая гомология проективной плоскости* П *преобразует множество точек обыкновенной плоскости*** π *в себя. Это преобразование плоскости* π *есть гомотетия, центр которой совпадает с центром P гиперболической гомологии.*

В самом деле: пусть A — некоторая точка плоскости π, а A' — ее образ. Пусть B — произвольная точка плоскости π, а

* Преобразование сдвига в пространстве определяется аналогично преобразованию сдвига на плоскости.

** π—обыкновенная плоскость, пополнением которой несобственными элементами получается плоскость П.

B' — ее образ. Тогда точки B и B' лежат на одной прямой с точкой P, а прямые AB и $A'B'$ параллельны, ибо они должны пересекаться в точке, лежащей на оси гомологии, а ось гомологии — несобственная прямая. Поэтому

$$\frac{PB'}{PB} = \frac{PA'}{PA} = \text{const}.$$

2°. *Если ось гиперболической гомологии — собственная прямая, а центр — несобственная точка (не являющаяся несобственной точкой оси), то такая гиперболическая гомология преобразует плоскость π (которой соответствует проективная плоскость Π) в себя самое. Это преобразование плоскости есть родство, ось которого совпадает с осью p гиперболической гомологии.*

В самом деле: в рассматриваемой гиперболической гомологии две различные точки несобственной прямой: центр гомологии P и несобственная точка Q оси гомологии — остаются на месте. Следовательно, несобственная прямая PQ переходит в себя, а потому совокупность собственных точек плоскости Π, т. е. плоскость π, также переходит в себя.

Это преобразование плоскости π есть аффинное преобразование, в котором все собственные точки прямой p остаются неподвижными; следовательно, это преобразование плоскости есть родство *, причем ось родства не параллельна направлению родства.

3°. *Параболическая гомология с несобственной осью есть перенос.*

В самом деле: если ось параболической гомологии есть несобственная прямая, то центр этой гомологии есть несобственная точка, так как в параболической гомологии центр лежит на оси. Такая параболическая гомология плоскость π (которой соответствует проективная плоскость Π) преобразует аффинно в себя, а каждую несобственную точку плоскости Π оставляет на месте.

Пусть A и B — две произвольные точки плоскости π, а A' и B' — их образы. Тогда прямые AA' и BB' должны пересекаться в несобственной точке P, т. е. $AA' \parallel BB'$; с другой стороны, AB и $A'B'$ должны пересекаться на оси гомологии, которая в рассматриваемом случае является несобственной прямой; следовательно, $AB \parallel A'B'$. Значит $AA'BB'$ — параллелограмм и потому $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} =$ const и, следовательно, параболическая гомология с несобственной осью есть перенос.

* См. § 21, п. 7, теорема 1.

4°. *Если ось параболической гомологии — собственная прямая, а центр рассматриваемой гомологии — несобственная точка этой прямой, то такая параболическая гомология есть сдвиг.*

В самом деле: пусть A — любая несобственная точка, отличная от центра гомологии. Если A' — образ точки A, то прямая AA' должна проходить через несобственную точку P, а потому A' — также несобственная точка, т. е. рассматриваемая параболическая гомология порождает аффинное преобразование плоскости π.

В этом аффинном преобразовании плоскости π каждой собственной точке M соответствует собственная же точка M' такая, что прямая MM' параллельна прямой p, ибо прямая MM' должна проходить через несобственную точку P прямой p, являющуюся центром рассматриваемой параболической гомологии. Так как, кроме того, все собственные точки прямой p неподвижны, то это аффинное преобразование есть родство, в котором направление родства параллельно оси родства, т. е. сдвиг.

п. 5. Инволюционное преобразование проективной плоскости

Возьмем на проективной плоскости точку P и прямую p, не проходящую через точку P. Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим через Q точку пересечения прямых PM и p. Поставим в соответствие точке M точку M', четвертую гармоническую к трем точкам P, Q и M. Точке P, а также каждой точке прямой p поставим в соответствие самое эту точку (рис. 111). Докажем, что построенное соответствие α есть проективное преобразование, а именно гиперболическая гомология γ с центром P, осью p и парой соответственных точек A и A', где A — какая-нибудь точка плоскости Π, а A' — ее образ в преобразовании α.

Пусть M — произвольная точка плоскости Π. Построим ее образ M' в гомологии γ; пусть прямая MA пересекает ось p в точке B, тогда прямая BA' пересечет прямую PM в точке M', являющейся образом точки M при гомологии γ.

Так как точки P, Q, M, M' получаются проектированием точек P, R, A, A' из точки B на прямую PM', а точки P, R, A, A' образуют гармоническую четверку, то и точки P, Q, M, M' также образуют гармоническую четверку. Значит данное преобразование α совпадает с гиперболической гомологией γ.

Отметим, что квадрат этой гиперболической гомологии есть тождественное преобразование. Это следует из того, что если точка M' является четвертой гармонической к точкам P, Q, M, то и точка M является четвертой гармонической к точкам P, Q, M'.

Преобразование, квадрат которого есть тождественное преобразование, называется инволюционным. Таким образом, указанное преобразование есть инволюционная гиперболическая гомология.

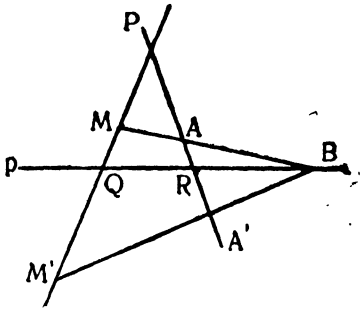


Рис. 111

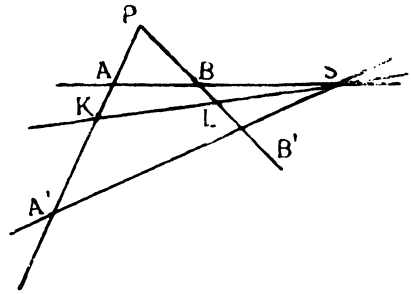


Рис. 112

Имеет место и обратное утверждение: *всякое инволюционное проективное преобразование α есть гиперболическая гомология, ставящая в соответствие каждой точке M точку M' такую, что точки M и M' гармонически разделяют центр гомологии и точку пересечения прямой MP с осью гомологии.*

В самом деле: пусть при преобразовании α точкам A и B соответствуют точки A' и B'. Так как это преобразование инволюционное, то точкам A' и B' соответствуют точки A и B. Прямой AA' поэтому должна соответствовать прямая $A'A$, т. е. та же самая прямая. Точно так же прямой BB' должна соответствовать та же самая прямая $B'B$. Отсюда следует, что точка P пересечения прямых AA' и BB' сама себе соответствует (т. е. совпадает со своим образом при преобразовании α) (рис. 112).

Обозначим через K точку прямой AA', четвертую гармоническую к точкам A, A', P, а через L — точку прямой BB', четвертую гармоническую к точкам B, B', P, и пусть K' и L' — образы точек K и L в преобразовании α.

Проективное преобразование α гармоническую четверку точек A, A', P, K переводит в гармоническую же четверку A', A, P, K'. Но так как для троек A, A', P и A', A, P четвертой гармонической является одна и та же точка K, то, следовательно, точка K' совпадает с K. Точно так же доказывается, что точка L' совпадает с L. Таким образом, при преобразовании α точки K и L совпадают со своими образами и, следовательно, образом прямой KL является эта же самая прямая. Обозначим через S точку пересечения прямых AB и KL и покажем, что прямая $A'S$ должна пройти через точку B'. В самом деле: пусть B'' — точка пересечения прямых PB и $A'S$. Две четверки точек P, K, A, A' и P, L, B, B'' находятся на перспективном расположении друг к другу (прямые, соединяющие соответственные точки этих четверок, проходят через одну и ту же точку S). Но пара точек P, K гармонически разделяет пару точек A, A'; следовательно, и пара точек P, L гармонически разделяет пару точек B, B''. Но выше мы имели, что пара точек P, L гармонически разделяет пару B, B'. Следовательно, точка B'' совпадает с точкой B'.

Точка S является неподвижной точкой прямой KL. В самом деле, она является точкой пересечения прямых AB и KL, образы которых $A'B'$ и KL также проходят через точку S. На прямой KL имеется, таким образом, три неподвижных точки K, L и S. Следовательно, все точки прямой KL являются неподвижными точками при преобразовании α.

Таким образом, при преобразовании α неподвижными являются точка P и все точки прямой KL; следовательно, α — гиперболическая гомология с центром в точке P и осью KL. Но, как это следует из рассуждений, приведенных в начале настоящего пункта, каждой точке M в этой гиперболической гомологии соответствует точка M', являющаяся четвертой гармонической к трем точкам P, Q и M, где Q — точка пересечения прямой MP с осью гомологии p.

§ 39. ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В КООРДИНАТАХ

п. 1. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть на проективной плоскости* Π *задана система координат (см. § 33, п. 2 и п. 4). Пусть* α *— проективное преобразование этой плоскости, которое произвольную точку* M $(x_1 : x_2 : x_3)$, *переводит в точку* M' $(x_1' : x_2' : x_3')$. *Тогда координаты точки* M' *являются линейными однородными функциями координат точки* M:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что преобразование, определяемое формулами (1), является проективным. В самом деле: в силу (2) это преобразование взаимнооднозначно. Далее, прообразом всякой прямой

$$u_1'x_1' + u_2'x_2' + u_3'x_3' = 0$$

является также прямая:

$$u_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ + u_2'(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + u_3'(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0,$$

или

$$(u_1'a_{11} + u_2'a_{21} + u_3'a_{31})\,x_1 + (u_1'a_{12} + u_2'a_{22} + u_3'a_{32})\,x_2 + \\ + (u_1'a_{13} + u_2'a_{23} + u_3'a_{33})\,x_3 = 0.$$

В этом уравнении в силу (2) коэффициенты при x_1, x_2 и x_3 не могут обращаться в нуль одновременно, поэтому это уравнение определяет прямую. Докажем теперь, что *всякое проективное преобразование* α *может быть задано формулами вида* (1).

Предположим, что в рассматриваемом проективном преобразовании α точки A $(1:0:0)$, B $(0:1:0)$, C $(0:0:1)$ и D $(1:1:1)$ (из которых никакие три не лежат на одной прямой) переходят соответственно в точки A' $(a_1:a_2:a_3)$, B' $(b_1:b_2:b_3)$, C' $(c_1:c_2:c_3)$, D' $(d_1:d_2:d_3)$.

Рассмотрим проективное преобразование β, определяемое формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_1\rho_1x_1 + b_1\rho_2x_2 + c_1\rho_3x_3, \\ x_2' &= a_2\rho_1x_1 + b_2\rho_2x_2 + c_2\rho_3x_3, \\ x_3' &= a_3\rho_1x_1 + b_3\rho_2x_2 + c_3\rho_3x_3. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Каковы бы ни были числа ρ_1, ρ_2, ρ_3 ($\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$, $\rho_3 \neq 0$), проективное преобразование β точки A, B и C переведет соответственно в точки A', B' и C'. Подберем теперь числа ρ_1, ρ_2, ρ_3 так, чтобы и точка D перешла в точку D', т. е. чтобы

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= a_1\rho_1 + b_1\rho_2 + c_1\rho_3, \\ d_2 &= a_2\rho_1 + b_2\rho_2 + c_2\rho_3, \\ d_3 &= a_3\rho_1 + b_3\rho_2 + c_3\rho_3. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Так как точки A', B' и C' не лежат на одной прямой, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

и эта система имеет решение относительно ρ_1, ρ_2, ρ_3. Считая, что в формулах (3) ρ_1, ρ_2, ρ_3 имеют значения, определяемые системой (4), мы можем утверждать, что преобразование β так же, как и преобразование α, точки A, B, C и D переводит соответственно в точки A', B', C', D', значит по первой основной теореме о проективных преобразованиях (§ 35, п. 1) преобразования α и β совпадают.

п. 2. Неподвижные точки проективного преобразования

Теорема 2. *Каково бы ни было проективное преобразование α плоскости Π, существует по крайней мере одна неподвижная точка P и одна неподвижная прямая p.*

Доказательство. Пусть проективное преобразование α представляется в координатах формулами (1).

Точка P $(x_1 : x_2 : x_3)$ будет неподвижной тогда и только тогда, когда $x_1' = \lambda x_1$, $x_2' = \lambda x_2$, $x_3' = \lambda x_3$. Подставляя эти значения x_1', x_2', x_3' в формулы (1), получим:

$$\lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$\lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$

$$\lambda x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,$$

или

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0.\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Последнее уравнение 3-й степени относительно λ. Так как коэффициенты его действительны, то оно имеет по крайней мере один действительный корень. Подставляя это значение λ в систему (5), найдем координаты $x_1 : x_2 : x_3$ неподвижной точки P.

Пусть дана прямая p

$$u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'=0.$$

Прообразом этой прямой будет прямая

$$\begin{aligned}&u_1'(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)+\\ &+u_2'(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+\\ &+u_3'(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)=0\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}&(a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3')x_1+\\ &+(a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3')x_2+\\ &+(a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3')x_3=0.\end{aligned}$$

Для того чтобы прямая $u_1'x_1'+u_2'x_2'+u_3'x_3'=0$ совпала со своим прообразом, необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях этих прямых коэффициенты при соответствующих координатах были пропорциональны, т. е.

$$\begin{aligned}a_{11}u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3'&=\mu u_1',\\ a_{12}u_1'+a_{22}u_2'+a_{32}u_3'&=\mu u_2',\\ a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+a_{33}u_3'&=\mu u_3',\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-\mu)u_1'+a_{21}u_2'+a_{31}u_3'=0,\\ a_{12}u_1'+(a_{22}-\mu)u_2'+a_{32}u_3'=0,\\ a_{13}u_1'+a_{23}u_2'+(a_{33}-\mu)u_3'=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-\mu & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\mu \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Последнее уравнение 3-й степени относительно μ и потому имеет по крайней мере один действительный корень. Подставляя этот корень в каждое из уравнений системы (7), найдем из системы (7) коэффициенты u_1', u_2', u_3' уравнения неподвижной прямой. Заметим, что уравнения (6) и (8) совпадают и, следовательно, имеют одни и те же корни.

п. 3. Гомологические преобразования в координатах

Пусть γ — гиперболическая гомология с центром P, осью p и парой соответственных точек A и A'. Выберем систему координат так, чтобы точка P имела координаты $0:0:1$, а прямая p определялась уравнением $x_3=0$. Тогда точки A и A' будут иметь соответственно координаты $a_1:a_2:a_3$ и $a_1:a_2:a_3'$. При таком выборе системы координат гиперболическая гомология определяется формулами:

$$\left.\begin{aligned}x_1'&=x_1,\\ x_2'&=x_2,\\ x_3'&=kx_3,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В самом деле: это преобразование β оставляет на месте как точку P $(0:0:1)$, так и каждую точку M $(x_1:x_2:0)$ прямой $x_3=0$. Полагая в формулах преобразования (9) $k=\frac{a_3'}{a_3}$, мы сможем утверждать, что преобразование β так же, как и гомология γ, точку A переведет в точку A' и значит на основании теоремы, доказанной в § 38, п. 1, проективное преобра-

зование β совпадает с гомологией γ. В частности, при $k=-1$ получаем инволюционную гомологию.

Пусть δ — параболическая гомология с центром P, осью p (проходящей через P) и парой соответственных точек A и A'. Выберем систему координат, принимая ось гомологии за прямую $x_3=0$, центр P за точку $(1:0:0)$ и точку A за точку $(0:0:1)$; тогда точка A' будет иметь координаты $a:0:1$ $(a\neq 0)$.

При таком выборе системы координат параболическая гомология определится формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1+ax_3,\\ x_2' &= x_2,\\ x_3' &= x_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

В самом деле: в этом преобразовании любая точка $(x_1:x_2:0)$ остается неподвижной, а точка A $(0:0:1)$ переходит в точку A' $(a:0:1)$ такую, что прямая AA' проходит через точку P $(1:0:0)$.

Замечание. Если интерпретировать проективную плоскость П с помощью второй модели, то формулами (9) определяется косое сжатие связки к плоскости x_1Sx_2 по направлению прямой Sx_3; при $k=-1$ — косая симметрия относительно плоскости x_1Sx_2 в направлении прямой Sx_3; при отрицательном $k\neq -1$ — произведение этих преобразований. Формулами же (10) определяется сдвиг связки относительно плоскости x_1Sx_2 по направлению прямой Sx_1.

§ 40. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Линией второго порядка на проективной плоскости называется совокупность точек, координаты которых удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1=0. \qquad (1)$$

Рассмотрим отдельно случаи реализации проективной плоскости в первой и во второй модели.

п. 1. Линии второго порядка в первой модели

Пусть $x_1:x_2:x_3$ — однородные координаты точки на проективной плоскости. Тогда декартовы координаты x и y соб-

ственных точек будут выражаться через однородные соотношениями:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad (x_3 \neq 0)$$

(см. § 33, п. 2). Отсюда следует, что декартовы координаты собственных точек линии второго порядка удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение определяет линию второго порядка на обыкновенной плоскости. Линия второго порядка на проективной плоскости, определяемая уравнением (1), отличается от линии, определяемой уравнением (2), теми несобственными точками, в которых линию (1) пересекает несобственная прямая $x_3 = 0$; координаты этих несобственных точек определяются системой уравнений:

$$x_3 = 0, \; a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \qquad (3)$$

которую мы получим, подставляя в уравнение (1) $x_3=0$.

Если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0,$$

то уравнение $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ имеет только одно действительное решение $x_1 = x_2 = 0$, а так как однородные координаты точки не могут одновременно обращаться в нуль, то в этом случае несобственная прямая $x_3 = 0$ не имеет с линией (1) ни одной общей точки и, следовательно, линия (1) состоит лишь из собственных точек, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению (2). В этом случае уравнение (2) определяет эллипс (если ему удовлетворяют координаты более чем одной точки), или одну точку (две мнимые пересекающиеся прямые), или мнимый эллипс.

Если $\delta < 0$, то уравнение $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ имеет два действительных различных решения и, следовательно, несобственная прямая $x_3 = 0$ пересекает линию (1) в двух различных точках. Линия (1) состоит, таким образом, из всех собственных точек линии (2) и двух несобственных точек, координаты которых определяются из системы (3). Линия (2) в этом случае ($\delta<0$) является гиперболой или парой пересекающихся прямых. Уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

в случае, если уравнение (2) есть уравнение гиперболы, определяет координаты векторов, имеющих асимптотические направления этой гиперболы; таким образом, в рассматриваемом случае линия (1) является гиперболой, дополненной несобственными точками ее асимптот. Если же уравнение (2) определяет две пересекающиеся прямые, то уравнение (1) определяет те же две прямые, дополненные их несобственными точками.

Пусть, наконец, $\delta = 0$. Тогда система (3) имеет единственное ненулевое решение $x_1 : x_2 : x_3 = -a_{12} : a_{11} : 0 = a_{22} : -a_{12} : 0$; несобственная прямая $x_3 = 0$ имеет с линией (1) только одну общую точку. Линия (2) в случае $\delta = 0$ является или параболой, или состоит из двух параллельных (действительных или мнимых), или двух совпадающих прямых. Если уравнение (2) есть уравнение параболы, то уравнение $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ определяет координаты векторов, параллельных ее диаметрам; линия (1) является параболой, дополненной несобственной точкой ее диаметров. Если же уравнение (2) определяет две параллельных или совпадающих прямых, то линия, определяемая уравнением (1), сосостоит из собственных точек этих прямых и присоединяемой к ним несобственной точки.

Мы рассмотрели тот случай, когда по крайней мере одно из чисел a_{11}, a_{12} и a_{22} не равно нулю. Если же $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Это уравнение определяет линию, состоящую из двух прямых: несобственной прямой $x_3 = 0$ и прямой $2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$. Если при этом $a_{13} = a_{23} = 0$, то линия, определяемая уравнением (1), является двойной несобственной прямой $x_3 = 0$.

п. 2. Линии второго порядка во второй модели

Пусть $x_1 : x_2 : x_3$ — проективные координаты «точки» во второй модели. Тогда, как известно из аналитической геометрии, однородное уравнение (1) определяет совокупность прямых, проходящих через начало координат и образующих конус второго порядка. Этот конус может быть невырождающимся действительным или мнимым конусом второго порядка или парой плоскостей (действительных, мнимых или совпадающих).

п. 3. Проективная классификация линий второго порядка

Как известно из алгебры, всякая квадратичная форма

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 \qquad (4)$$

некоторым невырожденным линейным преобразованием:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3, \\ x_2 &= c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + c_{23}X_3, \\ x_3 &= c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{33}X_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

может быть приведена к виду

$$\varepsilon_1X_1^2 + \varepsilon_2X_2^2 + \varepsilon_3X_3^2, \qquad (6)$$

где ε_1, ε_2, ε_3 могут принимать значения $+1$, -1 и 0. При этом каким бы невырожденным преобразованием (5) форма (4) ни приводилась к виду (6), количество квадратов, отличных от нуля, а также количество положительных и отрицательных квадратов в выражении (6) всегда одно и то же. Геометрически это означает, что всякая линия

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0$$

проективным преобразованием может быть переведена в одну из следующих пяти линий:

1) $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ (мнимая линия),

2) $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$ (овальная линия),

3 $X_1^2 + X_2^2 = 0$ (две мнимые прямые),

4) $X_1^2 - X_2^2 = 0$ (две действительные и различные прямые),

5) $X_1^2 = 0$ (две совпадающие прямые)

и что ни одна из этих линий не может быть переведена в другую никаким проективным преобразованием.

Заметим, что если интерпретировать проективную плоскость первой моделью, то эллипс, гипербола, дополненная несобственными точками ее асимптот, и парабола, дополненная несобственной точкой ее диаметров, являются овальными линиями. Отсюда следует, что эти линии могут быть переведены друг в друга проективным преобразованием.

п. 4. Внутренние и внешние точки овальной линии второго порядка

Определение. *Точка M называется внутренней точкой овальной линии K второго порядка, если любая прямая, проходящая через точку M, пересекает линию K в двух различных точках. Внешними точками овальной линии K называются точки, не лежащие на самой линии K и не являющиеся ее внутренними точками.*

Внутренние точки овальной линии K второго порядка являются образами внутренних точек окружности C, которая служит прообразом линии K в некотором проективном преобразовании, а внешние точки являются образами внешних точек этой окружности в том же проективном преобразовании. В самом деле: пусть M — внутренняя точка окружности C, M' — ее образ в преобразовании α, переводящем окружность C в овальную линию K. Пусть l' — произвольная прямая, проходящая через точку M', l — ее прообраз в преобразовании α. Так как M — внутренняя точка окружности C, то прямая l (проходящая через точку M) пересечет окружность C в двух различных точках; следовательно, и прямая l' пересекает линию K в двух различных точках. Аналогично доказывается, что всякая внутренняя точка M' овальной линии K является образом некоторой точки M, внутренней по отношению к окружности C.

§ 41. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

п. 1. Проективное пространство

Подобно тому как множество точек обыкновенной плоскости присоединением несобственных элементов превращается в проективную плоскость, точнее в ее модель, точно так же, исходя из трехмерного обыкновенного (эвклидова) пространства, можно построить модель трехмерного проективного пространства.

Проективная прямая проективного пространства получается, как и в случае плоскости, из обыкновенной прямой присоединением к множеству ее точек нового элемента, который мы по-прежнему будем называть несобственной, или бесконечноудаленной, или идеальной точкой проективной прямой.

Условимся в следующем: если две прямые параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют одну и ту же несобственную точку. Если же две различные прямые

не параллельны, то соответствующие им проективные прямые имеют различные несобственные точки.

Проективной плоскостью проективного пространства, соответствующей данной обыкновенной плоскости эвклидова пространства, назовем множество точек, получаемое присоединением к множеству точек обыкновенной плоскости всех тех несобственных точек, которые присоединяются к прямым, лежащим на этой плоскости. Несобственной или бесконечноудаленной прямой проективной плоскости называется множество всех несобственных точек, присоединенных к множеству точек той обыкновенной плоскости, которой соответствует рассматриваемая проективная плоскость.

Наконец, множество всех несобственных точек назовем несобственной или бесконечноудаленной плоскостью.

Точки, проективные прямые и проективные плоскости, которые не являются несобственными, будем называть, соответственно, собственными проективными точками, собственными проективными прямыми и собственными проективными плоскостями.

Множество, состоящее из всех обыкновенных и несобственных точек, называется проективным пространством.

Условимся в следующей терминологии:

1) будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной прямой или что проективная прямая проходит через рассматриваемую точку, если эта точка принадлежит множеству точек, составляющему эту проективную прямую;

2) будем говорить, что проективная прямая (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной) или что проективная плоскость проходит через проективную прямую, если множество точек проективной прямой входит в множество точек рассматриваемой проективной плоскости;

3) будем говорить, что точка (собственная или несобственная) лежит на проективной плоскости (собственной или несобственной), если эта точка является элементом того множества, которое составляет рассматриваемую проективную плоскость;

4) вместо того чтобы говорить, что точка лежит на прямой (или прямая проходит через точку), точка лежит на плоскости (или плоскость проходит через точку), прямая лежит на плоскости (или плоскость проходит через прямую), говорят: точка и прямая инцидентны, точка и плоскость инцидентны, прямая и плоскость инцидентны.

Мы построили модель проективного пространства. Отметим некоторые свойства проективного пространства, исходя из этой модели *.

I. *Всяким двум различным точкам инцидентна прямая и притом только одна.*

II. *Всякие две различные плоскости инцидентны прямой и притом только одной.*

III. *Если точки A и B инцидентны плоскости* П, *то прямая AB ** инцидентна этой плоскости.*

IV. *Если плоскости* α *и* β *инцидентны точке M, то прямая* αβ***инцидентна этой точке.*

V. *Три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной плоскости.*

VI. Три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной точке.

Для того чтобы хорошо понять идею построения проективного пространства, получающегося из эвклидова пространства присоединением несобственных элементов, мы настоятельно рекомендуем читателю провести подробные доказательства этих свойств.

Мы потому особо выделили свойства I—VI проективного пространства, что при аксиоматическом построении проективной геометрии эти именно свойства включаются в число аксиом, определяющих понятие проективного пространства.

В качестве дополнительных предложений можно рекомендовать доказать еще следующие свойства проективного пространства:

VII. *Всякие две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны и притом только одной точке.*

VIII. *Всякие две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны и притом только одной плоскости.*

IX. *Точка и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной плоскости.*

X. *Плоскость и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной точке.*

Мы видим, что в проективном пространстве, как и на проективной плоскости, нет параллельных прямых: две любые прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются (VII). В проективном пространстве нет и параллельных плоскостей: всякие две плоскости проективного пространства пе-

---

* Доказываемые ниже свойства играют основную роль при аксиоматическом построении проективного пространства.

** *AB* — прямая, инцидентная точкам *A* и *B*.

*** αβ — прямая, инцидентная плоскостям α и β.

ресекаются по прямой линии (II). Наконец, любая прямая, не лежащая в проективной плоскости, всегда пересекает последнюю (X). Всем этим проективное пространство существенно отличается от эвклидова.

п. 2. Принцип двойственности

Перепишем предложения I—X в виде следующей таблицы:

I. Всяким двум различным точкам инцидентна прямая и притом только одна.	II. Всякие две различные плоскости инцидентны прямой и притом только одной.
III. Если точки A и B инцидентны плоскости П, то прямая AB инцидентна этой плоскости.	IV. Если плоскости α и β инцидентны точке P, то прямая $\alpha\beta$ инцидентна этой точке.
V. Три точки, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной плоскости.	VI. Три плоскости, не инцидентные одной прямой, инцидентны и притом только одной точке.
VII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной плоскости, инцидентны и притом только одной точке.	VIII. Всякие две различные прямые, инцидентные одной точке, инцидентны и притом только одной плоскости.
IX. Точка и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной плоскости.	X. Плоскость и неинцидентная ей прямая инцидентны и притом только одной точке.

Сопоставляя предложения: I—II, III—IV, V—VI, VII—VIII, IX—X, видим, что каждое из них получается из другого заменой в нем слова точка словом плоскость и наоборот: слово прямая остается без изменения.

Два положения о точках, прямых и плоскостях, сформулированные только в терминах инцидентности, называются двойственными, если одно из них получается из другого заменой слова точка на плоскость, слова плоскость на слово точка и с сохранением слова прямая.

Таким образом, предложения I, III, V, VII, IX соответственно двойственны предложениям II, IV, VI, VIII, X.

Оказывается, что если верна некоторая теорема A о точках, прямых и плоскостях проективного пространства, сформулированная только в терминах инцидентностей между ними, то будет верна и двойственная теорема B.

Это предложение составляет содержание так называемого *принципа двойственности*. Более полно этот принцип может быть сформулирован и доказан лишь при аксиоматическом построении проективного пространства. Он вытекает из двойственности аксиом соединения, составляющих первую группу аксиом проективной геометрии, а именно предложение, двойственное каждой аксиоме этой группы, есть либо аксиома

той же группы, либо теорема, которая доказывается на основании аксиом этой группы. Поэтому вместе со всеми аксиомами первой группы верны и все двойственные этим аксиомам предложения. При этом если предложение A двойственно предложению B, то и доказательство предложения A двойственно доказательству предложения B.

Построенная нами модель проективного пространства подчиняется всем аксиомам проективной геометрии, а потому принцип двойственности верен и в построенной модели.

Мы можем пользоваться сейчас этим принципом как эвристическим методом при формулировке предложений, двойственных уже доказанным.

Для проективной плоскости имеет место так называемый *малый принцип двойственности:* если верна некоторая теорема A о точках и прямых проективной плоскости, сформулированная только в терминах инцидентностей между ними, то будет верна и теорема B, двойственная теореме A, т. е. теорема, которая получается из A заменой слова точка на слово прямая, а слова прямая на слово точка. Например, утверждению: двум любым различным точкам инцидентна прямая и притом только одна, двойственно утверждение: двум любым различным прямым инцидентна точка и притом только одна.

Доказательство малого принципа двойственности так же, как и сформулированного выше большого принципа двойственности, получается лишь при аксиоматическом построении проективного пространства.

Можно говорить не только о двойственных предложениях, но и о двойственных фигурах. Если какая-нибудь фигура F образована точками, прямыми и плоскостями, связанными определенными отношениями инцидентностей, то двойственная фигура G получится, если, сохраняя отношения инцидентностей, заменить точки плоскостями, плоскости точками, а прямые — прямыми.

Рассмотрим, например, куб — многогранник, имеющий 8 вершин, 12 ребер и 6 граней. Двойственной фигурой будет многогранник, имеющий 8 граней, 12 ребер, 6 вершин; это, например, октаэдр (рис. 113). Строение октаэдра можно уяснить себе, рассматривая его как фигуру, двойственную кубу; так, в кубе из каждой вершины исходят три ребра, т. е. каждая вершина (точка) инцидентна с тремя ребрами (прямыми). Значит в двойственной фигуре (октаэдр) каждая грань (плоскость) инцидентна с тремя ребрами (прямыми), т. е. грани октаэдра — треугольники.

Далее, в кубе каждая грань—четырехугольник, т. е. каждая грань (плоскость) инцидентна с четырьмя ребрами (прямыми). Значит, в октаэдре каждая вершина инцидентна с четырьмя ребрами, т. е. из каждой вершины выходят четыре ребра.

Рассмотрим еще многогранник, ограниченный 12 гранями — пятиугольниками, например, додекаэдр; он имеет 30 ребер и 20 вершин.

Рис. 113

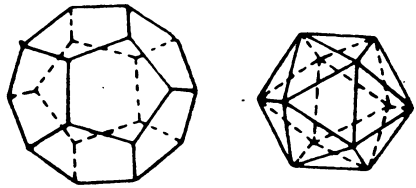


Рис. 114

Двойственной фигурой будет многогранник, имеющий 12 вершин, 30 ребер и 20 граней; это, например, икосаэдр (рис. 114). В додекаэдре из каждой вершины исходят три ребра; значит в икосаэдре в каждой грани лежат три ребра, т. е. грани икосаэдра — треугольники. В додекаэдре на каждой грани лежит пять ребер, значит в икосаэдре из каждой вершины исходит 5 ребер.

Заметим, наконец, что фигурой, двойственной тетраэдру, будет тетраэдр.

п. 3. Однородные координаты

Введем в пространстве декартову систему координат. Если точка M собственная, то в выбранной системе координат она имеет координаты x, y, z. Рассмотрим четыре числа x, y, z, 1 и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ всех чисел, пропорциональных четверке чисел x, y, z, 1:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1,$$

т. е.

$$x_1 = \lambda x, \quad x_2 = \lambda y, \quad x_3 = \lambda z, \quad x_4 = \lambda,$$

где λ принимает все действительные значения, кроме нуля. Так как $x_4 \neq 0$, то

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Любая четверка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ называется однородными координатами точки M. Если M — несобственная точка пространства, то через нее проходит связка параллельных между собой прямых. Возьмем какой-нибудь вектор $\boldsymbol{a} \neq 0$, коллинеарный этим прямым; пусть X, Y, Z — координаты этого вектора. Рассмотрим четверку чисел $X, Y, Z, 0$ и возьмем класс $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ всех четверок чисел, пропорциональных четверке чисел $X, Y, Z, 0$:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = X : Y : Z : 0,$$

т. е.

$$x_1 = \lambda X, \quad x_2 = \lambda Y, \quad x_3 = \lambda Z, \quad x_4 = 0,$$

где λ принимает все действительные значения, кроме 0. Любая четверка чисел построенного класса $x_1 : x_2 : x_3 : 0$ называется однородными координатами несобственной точки M.

Любая плоскость в проективном пространстве определяется линейным однородным уравнением

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

и обратно. В частности, несобственная плоскость определяется уравнением $x_4 = 0$.

п. 4. Проективные преобразования пространства

Проективным преобразованием пространства называется такое преобразование проективного пространства, при котором трем любым различным точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой.

При проективном преобразовании пространства всякая плоскость отображается на плоскость, и это отображение является проективным.

Множество всех проективных преобразований пространства образует группу.

*Каковы бы ни были 5 точек A, B, C, D, E проективного пространства, из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости, и 5 точек A', B', C', D', E', из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости, существует и притом только одно проективное преобразование, при котором точки A, B, C, D, E переходят соответственно в точки A', B', C', D', E' *.*

* Метод, использованный при доказательстве аналогичной теоремы для проективной плоскости (§ 35, п. 1), не может быть перенесен на проективное пространство. Доказательство этой теоремы требует рассуждений и соображений, выходящих за рамки настоящей книги (см., например, Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. Гостехиздат, 1953, гл. V, § 106—108).

Так же, как и на проективной плоскости, двойное отношение является инвариантом проективных преобразований пространства.

п. 5. Проективные преобразования в координатах

В координатах проективное преобразование пространства выражается линейными однородными соотношениями:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$

$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,$$

$$x_4' = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4,$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0,$$

причем $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ — координаты произвольной точки, а $x_1' : x_2' : x_3' : x_4'$ — координаты ее образа в проективном преобразовании.

п. 6. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется совокупность точек проективного пространства, однородные координаты которых удовлетворяют однородному уравнению второй степени:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

Все поверхности второго порядка делятся на 8 проективных классов:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ — мнимая поверхность;

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ — овальная поверхность;

3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ — тороидальная поверхность;

4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — мнимый конус;

5) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — действительный конус;

6) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — две мнимые плоскости;

7) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — две действительные плоскости;

8) $x_1^2 = 0$ — две совпадающие плоскости.

Заметим, что эллипсоид, двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид, дополненные несобственными точками, относятся к классу овальных поверхностей. Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид, дополненные несобственными точками, относятся к классу тороидальных поверхностей. Конус и цилиндры второго порядка (эллиптический, гиперболический и параболический), дополненные несобственными точками, относятся к классу конусов.

Дополнение к главе V

ТОПОЛОГИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Перейдем теперь к изучению топологических свойств проективной плоскости, т. е. таких ее свойств, которые сохраняются при любом взаимнооднозначном и взаимнонепрерывном отображении. Это изучение поможет нам лучше понять различие между эвклидовой и проективной плоскостью (а также различие между эвклидовой и проективной прямой).

Для того чтобы можно было изучать топологические свойства какого-либо множества, надо прежде всего установить, что́ мы будем понимать под окрестностью точки этого множества.

На обыкновенной прямой эвклидовой плоскости под окрестностью точки принято понимать любой интервал, содержащий внутри себя эту точку. Это определение окрестности мы переносим и на проективную прямую.

Под *окрестностью* любой собственной точки x собственной проективной прямой Λ мы будем понимать любой интервал $u(x)$ прямой λ (соответствующей прямой Λ), внутри которого лежит x; под окрестностью $u(x)$ несобственной точки x собственной проективной прямой Λ мы будем понимать множество, состоящее из этой несобственной точки x и всех тех собственных точек проективной прямой Λ, которые остаются на прямой λ после удаления из нее любого отрезка вместе с его граничными точками (рис. 115).

При таком определении понятия окрестности на проективной прямой (собственной) проективная прямая является множеством, гомеоморфным * окружности [под окрестностью произвольной точки окружности мы понимаем открытую (без концов) дугу этой окружности, содержащую внутри себя эту точку]. Чтобы в этом убедиться, построим окружность, касающуюся прямой Λ в точке S. Пусть N — точка окружности, диаметрально противоположная S. Поставим в соответствие каждой точке x окружности точку y встречи прямой Nx с прямой Λ; точке N поставим в соответствие несобственную точку прямой Λ. Это соответствие является взаимнооднозначным; оно будет также и взаимнонепрерывным, так как любая окрестность $u(x)$ точки x отображается в некоторую окрестность $u(y)$ точки y и наоборот (рис. 116). На рис. 117 показано соответствие двух окрестностей: окрестности точки N окружности и окрестности несобственной точки прямой Λ.

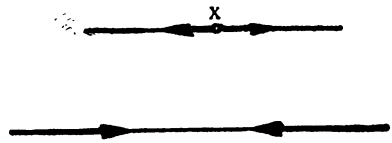


Рис. 115

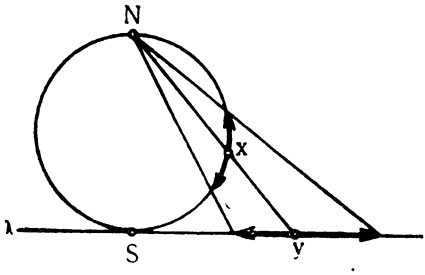


Рис. 116

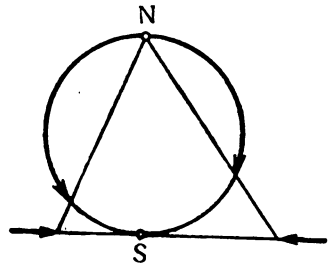


Рис. 117

Топологическое соответствие, установленное между окружностью и проективной прямой, позволяет нам говорить, что проективная прямая является замкнутой линией на проективной плоскости.

На эвклидовой прямой λ каждая ее точка x разбивает множество всех точек этой прямой на два подмножества: это

* Два точечных множества, в каждом из которых введено понятие окрестности, называются *гомеоморфными*, если между точками этих множеств можно установить такое взаимнооднозначное соответствие, при котором окрестности произвольной точки одного множества соответствует окрестность соответствующей точки другого множества.

значит, что если мы удалим из прямой точку x, то оставшееся множество точек можно представить в виде суммы двух непересекающихся подмножеств A и B таких, что никакая точка одного не будет предельной для другого*.

Проективная прямая, так же как и окружность, этим свойством уже не обладает.

Далее: две точки x_1 и x_2 эвклидовой прямой разбивают ее на три множества: конечный интервал (x_1, x_2) $(x_1 < x_2)$ и два бесконечных интервала $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$.

Две точки x_1 и x_2 проективной прямой так же, как и две точки окружности, разбивают проективную прямую на два множества A и B, каждое из которых гомеоморфно интервалу. Присоединяя сами точки x_1 и x_2 к множеству A, мы получим множество точек, гомеоморфное отрезку, а присоединяя эти точки x_1 и x_2 к множеству B, мы получим снова множество точек, гомеоморфное отрезку. Таким образом, две точки на проективной прямой порождают на ней два отрезка, и, чтобы различить один отрезок от другого, надо указать еще третью точку, принадлежащую одному из множеств A или B.

Перейдем теперь к изучению топологических свойств проективной плоскости.

Назовем окрестностью произвольной точки x проективной плоскости множество всех внутренних точек любой овальной линии второго порядка, для которой точка x внутренняя.

Отметим некоторые свойства проективной плоскости, отличающие ее от эвклидовой. Всякая прямая l эвклидовой плоскости π разбивает эту плоскость на две части. Это значит, что множество всех точек плоскости π, не лежащих на прямой l может быть представлено в виде суммы двух непересекающихся множеств A и B таких, что ни одно из этих множеств не имеет предельных точек в другом. Множество A состоит из всех точек плоскости π, лежащих по одну сторону от прямой l, а множество B состоит из всех точек плоскости π, расположенных по другую сторону от прямой l.

На проективной плоскости это свойство не имеет места: никакая проективная прямая Λ проективной плоскости Π ее не разбивает (в указанном смысле); иными словами: множество точек, которое получится, если из проективной плоскости удалить все точки какой-нибудь проективной прямой Λ, яв-

---

* Точка x называется *предельной* для множества A, если в любой ее окрестности имеется по крайней мере одна точка множества A, отличная от x.

ляется связным *. Но для того чтобы множество M было связным, необходимо и достаточно, чтобы для любых его точек x и y нашлось связное множество P, содержащее эти точки. В нашем случае таким множеством будет один из отрезков прямой xy — именно тот, который не содержит точки пересечения прямой xy с прямой Λ.

Две пересекающиеся прямые разбивают эвклидову плоскость на четыре области **.

Две проективные прямые Λ и M разбивают проективную плоскость на две области.

1-й случай. Прямые Λ и M пересекаются в собственной точке. В этом случае одна из областей A состоит из всех собственных точек, расположенных в одной из пар вертикальных углов, образованных прямыми λ и μ, и тех несобственных точек, которые присоединены к прямым, проходящим через точку пересечения прямых λ и μ. Вторая область B может быть описана аналогично. Докажем, что A — область. Если x — собственная точка множества A, то существует, например, окружность с центром в точке x, все внутренние точки которой принадлежат A. Если x — несобственная точка множества A, то для гиперболы (имеющей прямые λ и μ своими асимптотами), пополненной несобственными точками, присоединяемыми к прямым λ и μ, все несобственные точки, принадлежащие множеству A, будут внутренними.

Мы доказали, что множество A открытое. Докажем, что оно связное. Возьмем две любые точки x и y, принадлежащие множеству A. Тогда эти точки x и y разбивают прямую xy на два таких отрезка, все точки одного из которых принадлежат множеству A. Таким образом, A — множество открытое и связное, т. е. A — область. Точно так же доказывается, что B — область.

2-й случай. Обе проективные прямые Λ и M собственные, но пересекаются в несобственной точке.

В этом случае за множество A примем все собственные точки, лежащие между прямыми λ и μ, которым соответствуют проективные прямые Λ и M; за множество B примем все точки проективной плоскости, кроме точек множества A и точек прямых Λ и M.

---

* Множество M называется *связным*, если оно не может быть представлено в виде суммы двух непустых и непересекающихся подмножеств таких, что ни одно из них не содержит точек, предельных для другого.

** *Областью* топологического пространства называется связное и открытое множество. Множество M точек называется открытым, если для каждой точки $x \in M$ найдется окрестность $u(x) \in M$.

Аналогично предыдущему доказывается, что и в этом случае A и B — области.

3-й случай. Одна из прямых Λ или M несобственная. Пусть, например, M — несобственная прямая. В этом случае за множество A примем все собственные точки, лежащие по одну сторону от прямой λ, которой соответствует собственная проективная прямая Λ, а за множество B — все собственные точки, лежащие по другую сторону от прямой λ. Множества A и B и в этом случае открытые и связные, т. е. области.

Три прямые λ, μ, ν эвклидовой плоскости, не проходящие

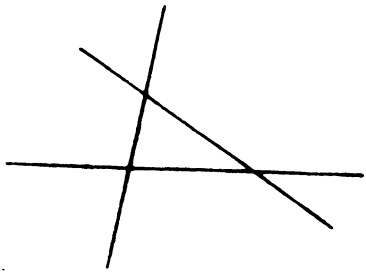


Рис. 118

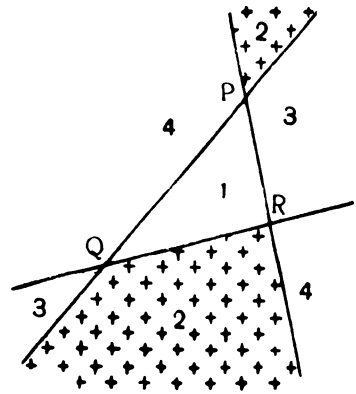


Рис. 119

через одну точку и попарно пересекающиеся, делят ее на семь областей (рис. 118).

Три проективные прямые Λ, M и N проективной плоскости, не проходящие через одну точку, делят проективную плоскость на четыре области (рис. 119).

Рассмотрим только тот случай, когда три прямые λ, μ, ν эвклидовой плоскости π, которым соответствуют проективные прямые Λ, M, N, лежащие на проективной плоскости Π, попарно пересекаются в собственных точках P, Q, R (рис. 119). Тогда одной из четырех областей является множество всех точек, лежащих внутри треугольника PQR. Эта область на рис. 119 обозначена цифрой *1*. Область, обозначенная цифрой *2* и заштрихованная крестиками, состоит:

1) из всех внутренних точек угла, вертикального к углу QPR;

2) из всех внутренних точек угла QPR, за исключением точек, лежащих внутри треугольника PQR и на его стороне QR;

3) из всех несобственных точек прямых, проходящих через точку P внутри угла QPR.

Аналогичную структуру имеют области *3* и *4*. Докажем, что указанные множества *1, 2, 3, 4* действительно являются областями.

I. Множество *1* является областью, так как каждая его точка может служить центром круга, все внутренние точки которого принадлежат множеству *1*. Следовательно, *1* — открытое множество. Далее: отрезок с концами в точках x и y множества *1* целиком входит в это множество. Следовательно, множество *1* связно.

II. Рассмотрим, например, множество *2*. Оно открыто. В самом деле, если x — собственная точка этого множества, то существует круг с центром в этой точке, все внутренние точки которого принадлежат множеству *2*. Если x — несобственная точка множества *2*, то для гиперболы, не пересекающей QR и имеющей прямые PQ и PR своими асимптотами (гипербола предполагается пополненной несобственными точками ее асимптот), точка x будет внутренней, причем все внутренние точки этой гиперболы будут принадлежать множеству *2*. Итак, множество *2* — открытое.

Докажем, что оно связно. В самом деле: если x и y — две любые точки этого множества, то один из двух отрезков прямой xy, на которые эта прямая разбивается точками x и y, входит в множество *2*. Итак, множество *2* открыто и связно; следовательно, является областью.

Точно так же доказывается, что множества *3* и *4* суть области.

Мы рекомендуем читателю рассмотреть другие возможные случаи расположения прямых Λ, M и N (прямые Λ и M пересекаются в несобственной точке, а прямая N пересекает прямые Λ и M в собственных точках; две прямые Λ и M пересекаются в собственной точке, а прямая N — несобственная) и доказать, что в каждом из этих случаев прямые Λ, M и N делят проективную плоскость на четыре области.

Таким образом, если на проективной плоскости взять три точки, не лежащие на одной прямой, и провести через каждую пару точек прямую, то мы получим не один треугольник, как это имеет место на эвклидовой плоскости, а четыре треугольника. Для того чтобы охарактеризовать каждый из них, надо указать, какие именно отрезки служат его сторонами, т. е. задать на каждом таком отрезке еще по одной точке или же задать какую-нибудь точку, лежащую внутри треугольника.

Основным фактом настоящей главы является следующая теорема.

Теорема. *Проективная плоскость есть неориентируемое двумерное замкнутое многообразие, эйлерова характеристика которого равна 1. Обратно: всякое неориентируемое двумерное замкнутое многообразие, эйлерова характеристика которого равна* 1, *гомеоморфно проективной плоскости.*

Таким образом, проективная плоскость характеризуется (с точностью до гомеоморфизма) указанными свойствами.

Не приводя доказательства этой теоремы, мы лишь разъясним ее смысл: для этого нам надо дать точное определение всех понятий, входящих в формулировку этой теоремы. Множество R называется *топологическим пространством*, а его элементы — точками этого пространства, если в этом множестве введено понятие окрестности. Это значит, что в R задана система подмножеств, называемых *окрестностями* и обладающих следующими свойствами:

1) каждая точка содержится в некоторой окрестности;

2) если u и v — две окрестности точки x, то существует окрестность w, содержащая точку x и содержащаяся в пересечении окрестностей u и v;

3) если u — окрестность точки x, а y — какая-нибудь точка этой окрестности, то существует окрестность v точки y, целиком содержащаяся в u;

4) если x и y — различные точки, то существуют непересекающиеся окрестности u и v этих точек.

Топологическое пространство R называется *двумерным многообразием,* если оно связно и если всякая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной внутренности круга. Если двумерное многообразие является *компактным* * топологическим пространством, то оно называется *замкнутым.*

Покажем прежде всего, что *проективная плоскость является двумерным многообразием.* Для этого докажем, что всякая ее точка имеет окрестность, гомеоморфную внутренности круга. Если точка собственная, то за окрестность можно взять внутренность любого круга с центром в этой точке. Если же эта точка несобственная, то существует гипербола (пополненная несобственными точками ее асимптот), для которой эта точка внутренняя. Совокупность внутренних точек этой гиперболы и будет окрестностью рассматриваемой несобственной точки.

---

* Топологическое пространство R называется *компактным,* если всякое его бесконечное подмножество имеет хотя бы одну предельную точку.

Для того чтобы показать, что эта окрестность гомеоморфна внутренности круга, мы докажем сначала, что проективное отображение является гомеоморфизмом. Действительно, проективное отображение взаимнооднозначно. Остается доказать только его непрерывность. Пусть x — произвольная точка проективной плоскости и $y=f(x)$ — ее образ в каком-нибудь проективном отображении f. Возьмем произвольную окрестность $v(y)$ точки y, т. е. множество всех внутренних точек некоторой овальной линии второго порядка, для которой точка y является внутренней. Так как отображение, обратное проективному, снова проективное, то прообраз окрестности $v(y)$ точки y будет множеством всех внутренних точек некоторой овальной линии второго порядка, для которой точка x является внутренней точкой; обозначим это множество через $u(x)$. Тогда $v(y)=f[u(x)]$, т. е. образом окрестности $u(x)$ точки x в проективном отображении f является окрестность $v(y)$ точки y, и значит отображение f непрерывно в точке x. Так как x была произвольной точкой проективной плоскости, то этим доказано, что проективное отображение f непрерывно в каждой точке x проективной плоскости.

В силу того, что отображение, обратное проективному, снова проективное, обратное отображение $x=f^{-1}(y)$ также непрерывно в любой точке y.

Таким образом доказано, что проективное отображение есть гомеоморфизм.

Всякая овальная линия второго порядка есть проективный образ окружности. При этом проективном отображении множество всех точек, лежащих внутри круга, отображается на множество всех точек, лежащих внутри этой линии. Но мы только что доказали, что проективное отображение является гомеоморфизмом; следовательно, совокупность внутренних точек гиперболы (пополненной несобственными точками ее асимптот) гомеоморфна совокупности внутренних точек круга.

Мы доказали, что всякая точка проективной плоскости имеет окрестность, гомеоморфную внутренности круга.

Докажем теперь, что *проективная плоскость является связным топологическим пространством.* Для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что всякие две точки x и y проективной плоскости принадлежат связному множеству. Таким множеством является, например, каждый из отрезков прямой, проходящей через эти точки.

Далее покажем, что *проективная плоскость является компактным пространством.* Для этого воспользуемся второй

моделью проективной плоскости и введем в ней прежде всего понятие окрестности.

Под *окрестностью* «точки», т. е. прямой x связки, будем понимать множество всех прямых связки, проходящих внутри конуса второго порядка, содержащего внутри себя и прямую x. Введя во второй модели окрестность, мы превратили тем самым связку прямых в топологическое пространство. Покажем, что это топологическое пространство компактно. В самом деле: его можно рассматривать как образ сферы (центр которой находится в центре связки) при отображении, ставящем каждой точке сферы прямую связки, проходящую через эту точку; это отображение, конечно, не является взаимнооднозначным, так как двум диаметрально противоположным точкам сферы ставится в соответствие одна прямая связки. Однако оно является непрерывным, так как образом любой окрестности * точки сферы является окрестность соответствующей прямой связки. Так как сфера, будучи замкнутым и ограниченным множеством эвклидова пространства, компактна, а компактность при непрерывном отображении сохраняется, то компактным будет и множество всех прямых связки, т. е. вторая модель проективной плоскости. Но первая модель проективной плоскости гомеоморфна второй модели, так как при их перспективном (следовательно, уже взаимнооднозначном) соответствии окрестность любой точки одной модели отображается на окрестность соответствующей ей точки другой модели. В силу гомеоморфизма первая модель также компактна.

Мы показали, что проективная плоскость есть замкнутое двумерное многообразие и, следовательно, является поверхностью.

Для того чтобы понять, что́ следует понимать под неориентируемостью проективной плоскости, мы должны ввести одно важное понятие, а именно — понятие триангуляции.

Будем называть *триангуляцией* совокупность треугольников эвклидова пространства n измерений, если любые два треугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо совсем не имеют общих точек.

Множество всех точек, принадлежащих треугольникам некоторой триангуляции, называется многогранником, или полиэдром. Гомеоморфный образ полиэдра называется кри-

---

* За окрестность точки сферы можно взять, например, совокупность точек шарового сегмента (не считая граничной окружности), на котором лежит эта точка. Тогда соответствующей ей окрестностью будет совокупность прямых, проходящих внутри кругового конуса.

волинейным полиэдром, а порождаемое триангуляцией полиэдра разбиение криволинейного полиэдра на треугольники называется триангуляцией этого криволинейного полиэдра. Выше мы разбили проективную плоскость на четыре треугольника (рис. 119). Однако это разбиение не будет триангуляцией проективной плоскости, так как каждые два треугольника этого разбиения имеют три общие вершины.

Для того чтобы получить триангуляцию проективной плоскости, возьмем на прямых AB, BC и CA (рис. 120) по одному отрезку с граничными точками A, B и C, например те, на которых лежат точки D, E, F. На каждой из прямых DE, EF и FD, соединяющих попарно эти точки, возьмем тот отрезок, все внутренние точки которого принадлежат одной из областей, на которые прямые AB, BC и CA делят проективную плоскость. Далее: на каждой из прямых AD, BE, CF возьмем тот отрезок, который не лежит внутри этой области.

Полученная совокупность — 6 точек, 15 отрезков и 10 треугольников — уже образует триангуляцию проективной плоскости.

Как доказывается в топологии, в четырехмерном эвклидовом пространстве можно найти такой многогранник, имеющий 6 вершин, 15 ребер и 10 граней, который будет гомеоморфен проективной плоскости, причем этот гомеоморфизм будет порождать то разбиение проективной плоскости, которое мы произвели. Этим доказывается, что указанное разбиение проективной плоскости есть триангуляция.

Существуют и многие другие триангуляции проективной плоскости.

Теперь перейдем к понятию ориентации.

Треугольник вместе с некоторым направлением обхода его вершин называется *ориентированным*. Каждое из двух возможных направлений обхода треугольника называется его ориентацией. Таким образом, у треугольника ABC существует две ориентации $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{BAC}$. Каждая ориентация данного треугольника порождает определенное направление на его сторонах, или, как говорят, определенную ориентацию этих сторон; так, ориентация $\overrightarrow{ABC}$ порождает на сторонах треугольника ABC ориентации $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Пусть в триангуляции K какой-нибудь поверхности даны два прилежащих друг к другу треугольника с общей стороной. Пусть выбраны определенные ориентации этих треугольников. Будем говорить, что эти ориентации одинаковы, если они порождают на общей стороне этих треугольников проти-

воположные направления. В противном случае ориентации этих треугольников будем называть противоположными. Так, например, на рис. 121 ориентации $\overrightarrow{ABC}$ и $\overrightarrow{ABD}$ противоположны, так как они порождают на стороне AB одинаковые направления.

Поверхность называется ориентируемой, если существует такая ее триангуляция, при которой можно так ориентировать все треугольники, что ориентации всяких двух прилежащих друг к другу треугольников будут одинаковы. В противном случае поверхность называется неориентируемой.

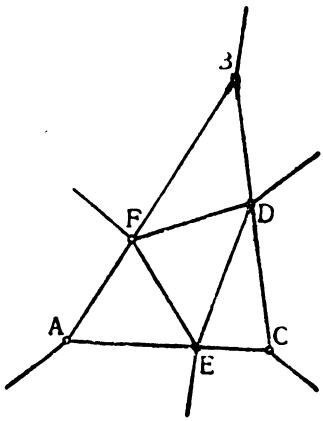


Рис. 120

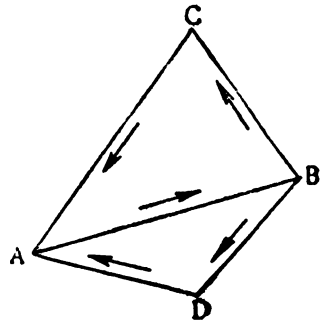


Рис. 121

Как доказывается в топологии, *гомеоморфный образ ориентируемой поверхности есть снова ориентируемая поверхность, а гомеоморфный образ неориентируемой поверхности есть неориентируемая поверхность.*

Конечная последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ ориентированных треугольников триангуляции поверхности называется дезориентирующей, если каждая пара соседних треугольников этой последовательности, а также треугольники Δ_1 и Δ_k примыкают друг к другу по стороне и если каждая пара прилегающих друг к другу треугольников этой последовательности ориентирована одинаково, кроме одной пары.

В топологии доказывается, что *для того чтобы данная поверхность была неориентируемой, необходимо и достаточно, чтобы на ней существовала хотя бы одна дезориентирующая последовательность треугольников ее триангуляции.*

Примерами ориентируемых поверхностей могут служить сфера, тор, крендель, квадрат, боковая поверхность цилиндра и др.

Примером неориентируемой поверхности может служить лист Мёбиуса. Мы получим эту поверхность, если склеим противоположные стороны прямоугольной бумажной ленты так, чтобы совместились точки этих сторон, симметричные относительно центра прямоугольника. Для этого перед склеиванием нужно одну из сторон предварительно повернуть на 180° (рис. 122).

Докажем, что лист Мёбиуса — неориентируемая поверхность.

Рассмотрим изображенную на рис. 123 триангуляцию листа Мёбиуса. Давая треугольникам этой триангуляции ориентации, обозначенные на чертеже стрелками, получим дезориентирующую последовательность.

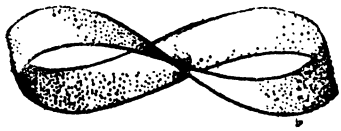


Рис. 122

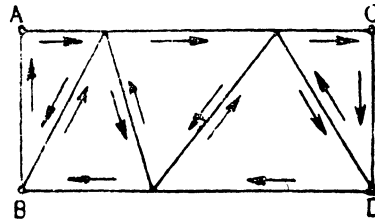


Рис. 123

Для того чтобы доказать неориентируемость проективной плоскости, мы построим еще одну ее модель, которая содержит лист Мёбиуса.

Мы уже доказали, что первая модель проективной плоскости гомеоморфна второй ее модели. Построим третью модель следующим образом: рассмотрим полусферу с центром в центре связки, являющейся второй моделью проективной плоскости, причем в полусферу мы включаем и все точки граничной окружности. Поставим в соответствие каждой прямой связки, не лежащей в плоскости граничного круга полусферы, точку ее пересечения с полусферой, а каждой прямой связки, лежащей в плоскости граничного круга, поставим в соответствие пару диаметрально противоположных точек ее пересечения с граничной окружностью полусферы.

«Точкой» рассматриваемой модели проективной плоскости мы будем считать каждую точку полусферы, не лежащую на граничной окружности, а также каждую пару диаметрально противоположных точек граничной окружности.

Окрестностью «точки», не лежащей на граничной окружности полусферы, будем считать все точки поверхности шаро-

вого сегмента, отсеченного от полусферы плоскостью, перпендикулярной к радиусу, идущему в эту точку. Если «точка» третьей модели является парой диаметрально противоположных точек A и B граничной окружности, то за ее окрестность мы возьмем множество точек двух шаровых полусегментов, которые получаются, если провести две плоскости, перпендикулярные диаметру AB на одинаковых расстояниях от центра полусферы, причем, конечно, каждая пара диаметрально противоположных точек граничной окружности полусферы рассматривается как одна «точка». При таком определении окрестности третья модель оказывается гомеоморфной второй модели.

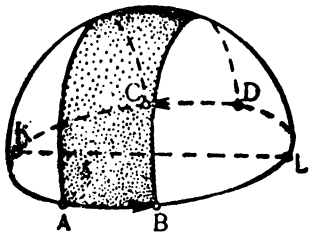


Рис. 124

Две плоскости, перпендикулярные к плоскости граничного круга и равноотстоящие от его центра, высекают из полусферы кусок, гомеоморфный прямоугольнику. Но так как на третьей модели пары диаметрально противоположных точек считаются за одну «точку», то дугу AB надо склеить с дугой CD так, чтобы точка A совпала с D, а B с C. При этом дуга AB совместится с дугой CD по диаметрально противоположным точкам; это совмещение отмечено на рис. 124 стрелками. При таком склеивании мы получим лист Мёбиуса.

Посмотрим, что представляет собой множество точек проективной плоскости, не вошедших в этот лист Мёбиуса. Для этого надо склеить оставшиеся два куска полусферы так, чтобы это склеивание производилось по диаметрально противоположным точкам остатков граничной окружности (т. е. дуг AKC и DLB). Это склеивание можно осуществить фактически; для этого достаточно взять зеркальное отражение одной из частей полусферы в плоскости граничного круга и переместить отраженную часть в пространстве так, чтобы дуги AKC и DLB совпали. Тогда мы получим поверхность шарового сегмента. Так как поверхность шарового сегмента гомеоморфна кругу, то, следовательно, проективная плоскость получается склеиванием листа Мёбиуса и круга по их границам. Такое склеивание в трехмерном эвклидовом пространстве (без самопересечений) произведено быть не может, но оно может быть осуществлено уже в четырехмерном пространстве *.

* Для этого помещают лист Мёбиуса в трехмерное пространство и соединяют произвольную точку S четырехмерного пространства, не лежа-

Покажем теперь, что построенная нами третья модель проективной плоскости есть неориентируемая поверхность. Для этого триангулируем ту ее часть, которая гомеоморфна листу Мёбиуса, на треугольники, образующие дезориентирующую последовательность, и продолжим триангуляцию листа Мёбиуса до триангуляции всей проективной плоскости *.

Но мы уже отмечали, что если поверхность допускает триангуляцию, в которой содержится дезориентирующая последовательность, то эта поверхность неориентируема. Значит мы показали, что проективная плоскость, реализуемая в виде третьей модели, является неориентируемой поверхностью.

Так как ориентируемость и неориентируемость есть топологический инвариант и так как все рассмотренные модели проективной плоскости между собой гомеоморфны, то неориентируемыми будут и остальные модели проективной плоскости.

Нам остается разъяснить последнее утверждение, высказанное в условии теоремы. Для этого определим понятие *эйлеровой характеристики.*

Обозначим соответственно через В, Р, Т число вершин, число ребер и число треугольников триангуляции поверхности; тогда число

$$E = \text{В} - \text{Р} + \text{Т}$$

называется эйлеровой характеристикой поверхности. Эйлерова характеристика не зависит от триангуляции поверхности. Две гомеоморфные поверхности имеют одну и ту же эйлерову характеристику, т. е. эйлерова характеристика поверхности есть топологический инвариант. Рассмотрим примеры.

1. Возьмем сферу. Впишем в нее октаэдр и спроектируем его ребра из центра сферы на эту сферу. При этом сфера разобьется на 8 криволинейных треугольников. В полученной триангуляции сферы (рис. 125) В = 6, Р = 12, Т = 8, поэтому эйлерова характеристика сферы:

$$E = \text{В} - \text{Р} + \text{Т} = 6 - 12 + 8 = 2.$$

щую в этом трехмерном, отрезками с точками границы листа Мёбиуса. Так как граница листа Мёбиуса гомеоморфна окружности, то совокупность этих отрезков гомеоморфна кругу. Так как далее каждая прямая, проходящая через точку S, имеет с трехмерным пространством, в котором расположен лист Мёбиуса, лишь одну общую точку (лежащую на границе листа Мёбиуса), то полученная поверхность сама себя не пересекает. Это построение принадлежит В. А. Ефремовичу.

* В построении В. А. Ефремовича достаточно после триангуляции листа Мёбиуса соединить точку S со всеми вершинами этой триангуляции, лежащими на границе листа Мёбиуса (см. предыдущее подстрочное примечание).

2. Возьмем тор (рис. 126). Построим многогранник, гомеоморфный тору: сложим для этого в «один квадрат» 9 кубиков (рис. 127) и вынем центральный «кубик» этого «квадрата». Поверхность полученного многогранника будет гомеоморфна тору. Протриангулируем этот многогранник так, как указано

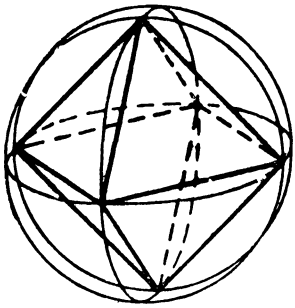


Рис. 125

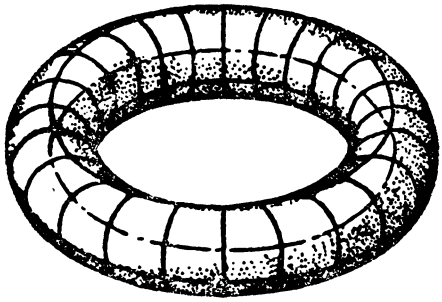


Рис. 126

на рис. 128. Тогда В=32, Р=96, Т=64 и, следовательно, эйлерова характеристика этого многогранника равна

$$E=В-Р+Т=32-96+64=0.$$

3. Рассмотрим боковую поверхность цилиндра. Впишем в нее треугольную призму, каждую ее грань разобьем диаго-

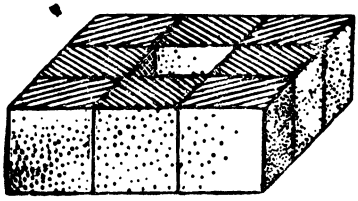


Рис. 127

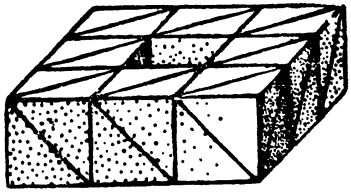


Рис. 128

налью на два треугольника и спроектируем полученную триангуляцию на поверхность цилиндра плоскостями, проходящими через ось цилиндра.

В полученной триангуляции цилиндра В=6, Р=12, Т=6, а потому эйлерова характеристика боковой поверхности цилиндра будет равна

$$E = В - Р + Т = 6 - 12 + 6 = 0.$$

4. Рассмотрим круг. Он гомеоморфен треугольнику, для которого В = 3, Р = 3, Т = 1, значит эйлерова характеристика круга равна

$$E = В - Р + Т = 3 - 3 + 1 = 1.$$

5. Возьмем лист Мёбиуса и протриангулируем его так, как это сделано на рис. 129.

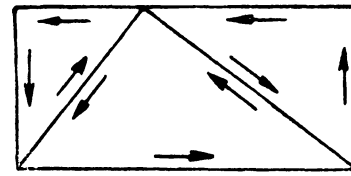


Рис. 129

В этой триангуляции В=3, Р=6, Т=3, поэтому эйлерова характеристика листа Мёбиуса равна

$$E = В - Р + Т = 3 - 6 + 3 = 0.$$

6. Для вычисления эйлеровой характеристики проективной плоскости вернемся к ее триангуляции, данной на стр. 212 (рис. 120). Здесь В=6, Р=15, Т=10; следовательно, эйлерова характеристика проективной плоскости равна

$$E = В - Р + Т = 6 - 15 + 10 = 1.$$

Мы указали ряд свойств, которыми обладает проективная плоскость: проективная плоскость есть двумерное замкнутое неориентированное многообразие, эйлерова характеристика которого равна 1.

Как мы отметили выше при формулировке основной теоремы (стр. 208), эти свойства и характеризуют проективную плоскость с точностью до топологических, т. е. взаимнооднозначных и взаимнонепрерывных, преобразований.

На доказательстве этого факта мы останавливаться не будем.

ГЛАВА VI

ИНВЕРСИЯ

§ 42. СТЕПЕНЬ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ

Степенью точки O относительно окружности C называется число

$$\sigma = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB},$$

где A и B — точки пересечения окружности C с любой прямой, проходящей через точку O (и пересекающей окружность C).

Из этого определения следует, что степень точки O относительно окружности C положительная, если точка O лежит вне окружности C (так как тогда векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют одинаковое направление); степень точки O относительно окружности C отрицательна, если точка O лежит внутри окружности C (так как в этом случае векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют противоположное направление). Наконец, степень точки O относительно окружности C равна нулю, если точка O лежит на окружности C.

Заметим, что степень точки O относительно окружности C в том случае, когда точка O лежит вне окружности C, равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки O к окружности C (произведение секущей на внешнюю ее часть равно квадрату касательной).

Степень точки O относительно окружности C может быть определена и соотношением

$$\sigma = d^2 - R^2,$$

где d — расстояние от точки O до центра окружности C, а R — радиус этой окружности.

В самом деле, если точка O лежит вне окружности C, то, как мы уже указали выше, ее степень относительно окружности C равна квадрату длины отрезка касательной, проведенной из точки O к окружности C; квадрат же указанного отрезка касательной равен d^2-R^2.

Если точка O лежит внутри окружности C, то проведем через нее и через центр окружности C прямую; пусть эта прямая пересечет окружность C в точках A и B. Тогда, обозначая через S центр окружности C, будем иметь

$$\sigma = \vec{OA}\cdot\vec{OB} = (\vec{OS}+\vec{SA})(\vec{OS}+\vec{SB}) = (\vec{OS}-\vec{AS})(\vec{OS}+\vec{SB}) =$$

$$= (\vec{OS}-\vec{AS})(\vec{OS}+\vec{AS}) = OS^2 - AS^2 = d^2 - R^2$$

(этот вывод верен и для того случая, когда точка O лежит вне окружности C).

Наконец, если точка O лежит на окружности C, то $d=R$, значит $d^2-R^2=0$, но в этом случае и $\sigma=0$.

§ 43. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНВЕРСИИ

Фиксируем на плоскости точку O и фиксируем число k ($k\neq 0$). Поставим в соответствие каждой точке M плоскости (отличной от O) точку M', лежащую на прямой OM и такую, что $\vec{OM}\cdot\vec{OM'}=k$.

Такое преобразование называется *инверсией*. Точка O называется *полюсом*, или *центром*, инверсии, число k — *степенью* инверсии. Если $k>0$, инверсия называется положительной, если $k<0$, — отрицательной. Инверсию I с полюсом O и степенью k будем обозначать так: (O, k).

Отметим, что если в инверсии I точке M соответствует точка M', то точке M' соответствует точка M; иначе говоря — инверсия есть инволюционное преобразование: *квадрат инверсии есть тождественное преобразование:* $I^2=E$.

Если инверсия (O, k) положительная ($k>0$), то все точки окружности K радиуса $\sqrt{k}$ с центром O неподвижны, так как если M — любая точка этой окружности, то

$$\vec{OM}\cdot\vec{OM} = (\sqrt{k})^2 = k.$$

Образ M' точки M в положительной инверсии (O, k) строится так:

1) если точка M лежит вне окружности с центром O и радиусом $\sqrt{k}$, то проводим из точки M касательную MT к этой

окружности (T — точка прикосновения); проекция M' точки T на OM и есть образ точки M;

2) если точка M лежит внутри окружности с центром O и радиусом $\sqrt{k}$, то через точку M проводим прямую, перпендикулярную OM; пусть T — одна из точек пересечения этого перпендикуляра с окружностью K; тогда касательная к окружности K в точке T пересечет OM в точке M', являющейся образом M в инверсии (O, k).

В самом деле: в обоих случаях

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = (\sqrt{k})^2 = k.$$

Отсюда следует, что все точки, лежащие вне окружности с центром O и радиусом $\sqrt{k}$ перейдут при инверсии (O, k) внутрь этой окружности, а все точки, лежащие внутри указанной окружности, перейдут во внешние ее точки (точки самой окружности, как указывалось, будут неподвижными).

§ 44. СВОЙСТВА ИНВЕРСИИ

Теорема 1. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, также лежащие на окружности, не проходящей через полюс инверсии.*

Доказательство. Рассмотрим инверсию (O, k). Пусть A, B, C, D — какие-нибудь четыре точки, лежащие на окружности S, не проходящей через полюс O инверсии.

Обозначим через A', B', C', D' образы точек A, B, C, D при инверсии I; тогда

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OD'} = k. \qquad (1)$$

Обозначим через A_0, B_0, C_0, D_0 вторые точки пересечения прямых OA, OB, OC, OD с окружностью S; эти точки A_0, B_0, C_0, D_0 существуют, так как точки A, B, C, D лежат на окружности S, а если прямая имеет с окружностью одну общую точку M, то она имеет с ней еще одну общую точку M_0 (в частности, совпадающую с M, если рассматриваемая прямая касается окружности S).

Обозначим через σ степень точки O относительно окружности S. Тогда

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB_0} = \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OD_0} = \sigma. \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA_0}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB_0}} = \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC_0}} = \frac{\overrightarrow{OD'}}{\overrightarrow{OD_0}} = \frac{k}{\sigma}, \qquad (3)$$

т. е. A', B', C', D' являются соответственно образами точек A_0 B_0, C_0, D_0 при гомотетии γ с центром O и коэффициентом $\frac{k}{\sigma}$, а потому так же, как и точки A_0, B_0, C_0, D_0, лежат на одной окружности S'. Окружность S' получается из окружности S при гомотетии γ.

Следствие 1. *При инверсии всякая окружность S, не проходящая через центр инверсии, отображается взаимнооднозначно на некоторую окружность S', также не проходящую через центр инверсии.*

В самом деле: пусть S — произвольная окружность, не проходящая через центр O инверсии (O, k), а S' — образ S при гомотетии γ с центром O и коэффициентом $\frac{k}{\sigma}$. Как было доказано:

1) любой точке M окружности S при инверсии (O, k) соответствует точка M', лежащая на окружности S' (точка M' получается из точки * M_0 при гомотетии γ);

2) любая точка M' окружности S' имеет при инверсии (O, k) прообраз M, лежащий на окружности S (который является прообразом M_0' ** в гомотетии γ);

3) наконец, двум различным точкам M_1 и M_2 окружности S соответствуют (в силу определения инверсии) две различные точки M_1' и M_2'.

Следствие 2. *Если R — радиус окружности S, R' — радиус окружности S' при инверсии (O, k), а σ — степень полюса O инверсии относительно окружности S, то*

$$\frac{R'}{R} = \frac{k}{\sigma}.$$

Теорема 2. *При инверсии всякие четыре точки, лежащие на окружности, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на одной прямой, не проходящей через полюс инверсии* (мы пока предполагаем, что ни одна из рассматриваемых точек не совпадает с центром инверсии).

Доказательство. Пусть A, B, C, D — четыре точки, лежащие на одной окружности S, проходящей через полюс O инверсии (O, k) (причем ни одна из точек A, B, C, D не совпадает с O). Пусть E — точка, диаметрально противополож-

* M_0 — вторая точка пересечения прямой OM с окружностью S.

** M_0' — вторая точка пересечения прямой OM' с окружностью S'.

ная точке O на окружности S. Обозначим через E' образ точки E при инверсии (O, k). Проведем через точку E' прямую l, перпендикулярную OE, и обозначим через A', B', C', D' точки пересечения прямых OA, OB, OC, OD с прямой l. Если точка A совпадает с E, то ее образ A' при инверсии (O, k) совпадает с образом E' точки E при той же инверсии, т. е. точка A' лежит на прямой l. Если же точка A не совпадает с E, то OAE — прямоугольный треугольник с прямым углом A (OE — диаметр окружности S). С другой стороны, $A'E' \perp OE'$. Отсюда следует, что вокруг четырехугольника $AA'E'E$ можно описать окружность (углы A и E' — прямые), а потому $\vec{OA} \cdot \vec{OA'} = \vec{OE} \cdot \vec{OE'} = k$, т. е. A' — образ A при инверсии (O, k). Аналогично доказывается, что точки B', C', D' пересечения прямых OB, OC, OD с прямой l являются образами точек B, C, D при инверсии (O, k).

Следствие 1. *Всякая окружность S, проходящая через полюс инверсии, отображается взаимнооднозначно на прямую, не проходящую через полюс инверсии.*

Следствие 2. *При инверсии любая прямая, не проходящая через полюс инверсии, отображается взаимнооднозначно на некоторую окружность, проходящую через полюс инверсии.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3. *При инверсии любые четыре точки, лежащие на одной прямой, проходящей через полюс инверсии, переходят в четыре точки, лежащие на той же прямой* (мы сейчас предполагаем, что ни одна из рассмотренных четырех точек не совпадает с центром инверсии).

Теорема 4. *Угол между двумя пересекающимися окружностями, угол между окружностью и пересекающей ее прямой и угол между двумя пересекающимися прямыми сохраняется при преобразовании инверсии*.*

Доказательство. Сначала заметим, что при инверсии сохраняется касание окружностей и касание окружности с прямой. Рассмотрим две пересекающиеся окружности C_1 и C_2. Пусть M — одна из точек пересечения окружностей C_1 и C_2, отличная от полюса O инверсии, а l_1 и l_2 — касательные к окружностям C_1 и C_2 в точке M их пересечения; тогда угол между l_1 и l_2 и будет (по определению) углом между пересе-

* Углом между двумя пересекающимися окружностями называется угол между касательными к этим окружностям в их общей точке. Углом между окружностью и пересекающей ее прямой называется угол между этой прямой и касательной к окружности в точке их пересечения.

кающимися окружностями C_1 и C_2. Если прямые l_1 и l_2 не проходят через полюс O инверсии, то их образами будут окружности l_1' и l_2', диаметры которых, проходящие через O, будут перпендикулярны l_1 и l_2, а потому угол между касательными к окружностям l_1' и l_2' в точке O будет равен углу между l_1 и l_2. Но в силу сохранения касания при инверсии угол между l_1' и l_2' будет равен углу между образами C_1' и C_2' окружностей * C_1 и C_2.

Если одна из прямых l_1 и l_2, например l_1, проходит через полюс инверсии, то в преобразовании инверсии она перейдет в себя; прямая l_2 перейдет в окружность l_2', диаметр которой, проходящий через O, будет перпендикулярен к l_2 и значит касательная к l_2' в точке O будет параллельна l_2; угол между l_1' и l_2' будет опять равен углу между l_1 и l_2. Наконец, если обе прямые l_1 и l_2 проходят через полюс инверсии, т. е. пересекаются в полюсе O инверсии, то точка O лежит на обеих окружностях C_1 и C_2, эти окружности перейдут в прямые C_1' и C_2', параллельные l_1 и l_2.

Замечание. Можно было бы показать, что при инверсии сохраняются углы между всякими двумя пересекающимися кривыми, имеющими касательные в каждой своей точке. Преобразования, при которых сохраняются углы между кривыми, называются *конформными*. Таким образом, *инверсия является конформным преобразованием.*

§ 45. КРУГОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Рассмотренное выше преобразование инверсии не является взаимнооднозначным, так как полюсу O инверсии не соответствует при инверсии (O, k) ни одна точка плоскости.

Чтобы сделать это преобразование взаимнооднозначным, добавим к эвклидовой плоскости одну бесконечноудаленную точку.

Эвклидову плоскость, пополненную одной бесконечноудаленной точкой, будем называть конформной плоскостью. Любую точку этой плоскости, отличную от бесконечноудаленной, будем называть *собственной.*

Условимся, что эта бесконечноудаленная точка лежит на любой прямой эвклидовой плоскости и не лежит ни на одной из окружностей эвклидовой плоскости. Две параллельные прямые имеют одну общую точку — бесконечноудаленную.

Две пересекающиеся прямые на конформной плоскости (как и две пересекающиеся окружности) имеют две общие

* Заметим, что C_1' или C_2' могут быть прямыми линиями.

точки — одну «на конечном расстоянии», другую — «бесконечноудаленную».

Две параллельные прямые имеют на конформной плоскости общую (бесконечноудаленную) точку; мы будем говорить тогда, что они касаются друг друга в этой точке.

Условимся при инверсии (O, k) точке O ставить в соответствие бесконечноудаленную точку, а бесконечноудаленной точке — точку O. Теперь можно высказать следующие два положения:

1) *инверсия конформной плоскости есть взаимнооднозначное преобразование;*

2) *при инверсии сохраняется касание окружностей и прямых.*

Условимся прямую конформной плоскости называть окружностью «бесконечнобольшого радиуса».

Будем называть круговым преобразованием конформной плоскости всякое взаимнооднозначное преобразование этой плоскости, при котором любые четыре точки, лежащие на одной окружности, переходят в четыре точки, также лежащие на одной окружности (понимая под окружностью, в частности, и прямую — окружность бесконечно большого радиуса).

Теорема 1. (Основная теорема). *Всякое круговое преобразование K есть или подобие, или инверсия, или может быть представлено в виде произведения подобия на инверсию.*

Доказательство. **Случай I.** *Круговое преобразование K оставляет на месте бесконечноудаленную точку.*

В этом случае любые три собственные точки плоскости, лежащие на одной прямой, переходят в три собственные точки, также лежащие на одной прямой. В самом деле: прямая, на которой лежат рассматриваемые три точки, проходит через бесконечноудаленную точку. Эта прямая должна перейти или в прямую, или в окружность; но в окружность она перейти не может, так как бесконечноудаленная точка неподвижна. Таким образом, K есть аффинное преобразование обыкновенной плоскости.

Но преобразование K окружность переводит в окружность и потому это аффинное преобразование является подобием. В самом деле: всякое аффинное преобразование плоскости есть произведение ортогонального преобразования на два сжатия к двум взаимно-перпендикулярным прямым; коэффициенты этих сжатий равны между собой, так как при преобразовании K окружность переходит в окружность. Произведение же ортогонального преобразования на два сжатия к двум

взаимно-перпендикулярным прямым с одинаковыми коэффициентами сжатий есть подобие.

Итак: *круговое преобразование конформной плоскости, оставляющее на месте бесконечноудаленную точку, есть подобие.*

Случай II. *Круговое преобразование K конформной плоскости переводит бесконечноудаленную точку в собственную точку O.*

Рассмотрим инверсию I с полюсом O. Инверсия I есть круговое преобразование. Поэтому произведение KI есть также круговое преобразование; это круговое преобразование оставляет на месте бесконечноудаленную точку и потому является подобием:

$$KI = \Pi.$$

Отсюда

$$(KI)I = \Pi I, \text{ или } K(II) = \Pi I.$$

Но $I^2 = E$ — единичное преобразование, значит

$$K = \Pi I.$$

Замечание. Инверсия I так же, как и данное круговое преобразование K, бесконечноудаленную точку переводит в собственную точку O, а потому (в силу $K = \Pi I$) подобие Π оставляет точку O на месте. Значит, подобие Π есть произведение некоторой гомотетии с центром O на поворот вокруг точки O или произведение гомотетии с центром O на симметрию относительно прямой, проходящей через точку O.

Теорема 2. *Если круговое преобразование K не является подобием, то его можно представить в виде произведения $K = \Omega I$ ортогонального преобразования Ω, имеющего неподвижную точку O, на положительную инверсию I с центром в этой точке O. Это представление K единственно, причем $\Omega I = I\Omega$.*

Доказательство. Так как преобразование K не является подобием, то бесконечноудаленная точка переходит при этом преобразовании в собственную точку O.

Пусть M — произвольная собственная точка плоскости, отличная от O, а M' — ее образ при преобразовании K.

Возьмем за центр инверсии I точку O, а за коэффициент инверсии число $k = OM \cdot OM'$ (инверсия I будет тогда положительной). Пусть P — образ точки M при инверсии I; тогда точка P лежит на луче OM и при этом

$$OP \cdot OM = OM \cdot OM',$$

откуда $OP = OM'$. Мы видим, что инверсия I с центром O и коэффициентом $k = OM \cdot OM'$ переводит точку M в точку P, находящуюся от O на том же расстоянии, на каком находится от точки O образ M' точки M в преобразовании K. Значит подобие Π в формуле $K = \Pi I$ сводится или к повороту Ω вокруг O, или к симметрии относительно прямой, проходящей через точку O:

$$K = \Omega I.$$

Остается доказать единственность такого представления K. Предположим, что

$$K = \Omega_1 I_1,$$

где I_1 — положительная инверсия с центром O, а Ω_1 — поворот вокруг O. Из равенства

$$\Omega I = \Omega_1 I_1$$

следует

$$\Omega_1^{-1}\Omega = I_1 I.$$

Так как множество ортогональных преобразований образует группу, то $\Omega_1^{-1}\Omega$ есть ортогональное преобразование. Но $I_1 I = \Omega_1^{-1}\Omega$, значит $I_1 I$ есть ортогональное преобразование. Но произведение двух положительных инверсий с коэффициентами k и k_1 и с одним и тем же центром O есть положительная гомотетия с центром O. В самом деле: пусть M — произвольная собственная точка конформной плоскости, M' — ее образ в положительной инверсии I (с коэффициентом k и центром O), а M'' — образ M' в инверсии I_1 (с коэффициентом k_1 и тем же центром O). Тогда все точки M, M', M'' лежат на одном луче OM и при этом $OM \cdot OM' = k$, $OM' \cdot OM'' = k_1$, значит $\frac{OM''}{OM} = \frac{k_1}{k}$. Однако положительная гомотетия может быть ортогональным преобразованием тогда и только тогда, когда ее коэффициент равен $+1$, т. е. когда она представляет собой тождественное преобразование E. Итак, $I_1 I = E$, откуда $I_1 = I$. Теперь из равенства $\Omega I = \Omega_1 I_1$ следует $\Omega = \Omega_1$.

Следствие 1. *Всякое круговое преобразование K отображает любую окружность взаимнооднозначно также на окружность.*

В самом деле: этим свойством обладают преобразования подобия и инверсии.

Следствие 2. *Множество всех круговых преобразований плоскости образует группу.*

В самом деле: 1) произведение двух круговых преобразований есть круговое преобразование;

2) преобразование, обратное круговому преобразованию, есть снова круговое.

Действительно: пусть K — произвольное круговое преобразование. Его по доказанному можно представить в виде $K = \Pi I$, где I — инверсия с центром O, а Π — подобие, оставляющее на месте точку O. Отсюда $K^{-1} = I^{-1}\Pi^{-1} = I\Pi^{-1}$ — круговое преобразование, так как I и Π^{-1} — круговые преобразования.

Теорема 3. *Если при круговом преобразовании K три точки A, B, C остаются неподвижными, то K есть или тождественное преобразование, или инверсия относительно окружности, проходящей через эти три точки (в частности, если точки A, B, C лежат на одной прямой, инверсия вырождается в симметрию относительно этой прямой).*

Доказательство. Пусть A, B, C — три точки конформной плоскости, неподвижные при круговом преобразовании K. Если K — подобие, не меняющее ориентации, то оно должно быть тождественным, ибо две из трех точек A, B, C непременно собственные, а подобие, не меняющее ориентации и оставляющее на месте две собственные точки, есть тождественное преобразование.

Если K является инверсией, то кругом инверсии должен быть круг, проходящий через точки A, B, C (если точки A, B, C лежат на одной прямой, то этот круг вырождается в прямую ABC, а инверсия — в симметрию относительно этой прямой).

Если $K = \Omega I$, где I — положительная инверсия с центром O, а Ω — ортогональное преобразование с неподвижной точкой O, то в силу неподвижности точек A, B, C эти точки должны лежать на круге инверсии (так как в противном случае $OA' \neq OA$ и ортогональным преобразованием Ω точка A' не может быть совмещена с A), а так как I — положительная инверсия, то Ω — тождественное преобразование. Итак, K — и в этом случае есть инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C. Наконец, K не может быть подобием, меняющим ориентацию (или ортогональным преобразованием второго рода), если точки A, B, C не лежат на одной прямой. Если же точки A, B, C лежат на одной прямой, а K — подобие, меняющее ориентацию (или ортогональное преобразование второго рода) и оставляющее их на месте, то

K — есть симметрия относительно прямой, проходящей через эти точки.

Теорема 4. *Существует и притом только два круговых преобразования, которые переводят три любые точки A, B, C конформной плоскости соответственно в три любые точки A', B', C' той же конформной плоскости.*

Доказательство. Пусть I_1 — инверсия с центром A, I_2 — инверсия с центром A'. Пусть B_1 и C_1 — образы точек B и C в инверсии I_1, а B_1' и C_1' — образы точек B' и C' в инверсии I_2.

Пусть, наконец, Π — подобие, переводящее отрезок B_1C_1 в $B_1'C_1'$. Тогда круговое преобразование $K = I_2\Pi I_1$ переводит точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'.

Пусть K_1 и K_2 — круговые преобразования, каждое из которых точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. Тогда круговое преобразование $K_1^{-1}K_2$ точки A, B, C оставляет неподвижными, и значит либо $K_1^{-1}K_2=E$, где E — тождественное преобразование, откуда $K_1=K_2$, либо $K_1^{-1}K_2=I$, где I — положительная инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C, или симметрия относительно прямой ABC, если точки лежат на одной прямой. Из последнего соотношения следует, что $K_2=K_1I$.

Итак, если K_1 — круговое преобразование, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C', то всякое круговое преобразование K_2, осуществляющее это же преобразование, либо совпадает с K_1, либо равно K_1I, где I — инверсия относительно окружности, проходящей через точки A, B, C, или симметрия относительно прямой ABC, если эти точки лежат на одной прямой.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Введение 5

Глава I. Общие определения 7
§ 1. Множества. Функции 7
§ 2. Отображения 9
§ 3. Группа преобразований 13

Глава II. Ортогональные преобразования 18
§ 4. Ортогональные отображения 19
§ 5. Свойства ортогональных отображений 20
§ 6. Ориентация 25
§ 7. Ортогональные преобразования первого и второго рода 31
§ 8. Основные виды ортогональных преобразований (перенос, симметрия, поворот) 34
п. 1. Перенос 34
п. 2. Симметрия относительно прямой 35
п. 3. Симметрия относительно точки 37
п. 4. Поворот 38
§ 9. Представление ортогональных преобразований в виде произведения основных ортогональных преобразований: переноса, симметрии и поворота 42
§ 10. Ортогональные преобразования плоскости в координатах 47
п. 1. Перенос 47
п. 2. Симметрия относительно прямой 48
п. 3. Симметрия относительно точки 48
п. 4. Поворот 49
п. 5. Общий случай 50
§ 11. Ортогональные преобразования пространства . . 51
п. 1. Перенос 52
п. 2. Симметрия относительно плоскости 53
п. 3. Симметрия относительно прямой 53
п. 4. Поворот 54
п. 5. Симметрия относительно точки 55
§ 12. Представление ортогональных преобразований пространства в виде произведения основных ортогональных преобразований 55
§ 13. Ортогональные преобразования пространства в координатах 65

Глава III. Подобные преобразования 69
§ 14. Отображение подобия 69
§ 15. Свойства подобных преобразований 70
§ 16. Гомотетия 72
§ 17. Представление подобного преобразования в виде произведения гомотетии на ортогональное преобразование 76
§ 18. Подобные преобразования плоскости в координатах 82
п. 1. Гомотетия 82
п. 2. Подобное преобразование (общий случай) . . . 83
§ 19. Подобные преобразования пространства 84

Глава IV. Аффинные преобразования 87
§ 20. Определение аффинных отображений и преобразований плоскости 87
§ 21. Примеры аффинных преобразований и отображений плоскости 89
п. 1 Косая симметрия 89
п. 2. Сжатие 90
п. 3. Косое сжатие 93
п. 4. Гиперболический поворот 94
п. 5. Эллиптический поворот 95
п. 6. Сдвиг 96
п. 7. Параллельное проектирование. Родство 98
п. 8. Ортогональное проектирование 100
§ 22. Свойства аффинных отображений 100
§ 23. Лемма Дарбу и ее следствия 102
§ 24. Инвариантность простого отношения при аффинном отображении 105
§ 25. Дальнейшие свойства аффинных отображений . . 107
§ 26. Представление произвольного аффинного преобразования в виде произведения простейших аффинных преобразований 110
§ 27. Изменение отрезков при аффинном отображении . . 113
§ 28. Изменение площадей при аффинном отображении плоскости на плоскость 113
§ 29. Применение аффинных преобразований к исследованию свойств эллипса 114
§ 30. Аффинное преобразование в координатах 119
§ 31. Аффинная классификация линий второго порядка . 122
§ 32. Аффинные преобразования пространства 125

Глава V. Проективные преобразования 130
§ 33. Понятие о проективной плоскости 130
п. 1. Первая модель проективной плоскости 132
п. 2. Однородные координаты 134
п. 3. Вторая модель проективной плоскости 138
п. 4. Проективные координаты 139
п. 5. Связь проективных координат в первой и второй модели проективной плоскости 140
п. 6. Замечания 141
§ 34. Определение проективного отображения 143
§ 35. Две основные теоремы о проективных преобразованиях 144

п. 1. Первая основная теорема 144
п. 2. Вторая основная теорема 148
п. 3. Приложения к аэрофотосъемке 152
§ 36. Двойное отношение 154
п. 1. Двойное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой 154
п. 2. Двойное отношение четырех прямых, принадлежащих одному пучку 155
п. 3. Двойное отношение во второй модели 160
п. 4. Инвариантность двойного отношения при проективном отображении 162
§ 37. Гармонизм 162
п. 1. Определения и примеры 162
п. 2. Способы построения четвертой гармонической к трем данным точкам 167
п. 3. Полный четырехсторонник и полный четырехвершинник 168
§ 38. Примеры проективных преобразований 171
п. 1. Гиперболическая гомология 171
п. 2. Параболическая гомология 177
п. 3. Гиперболическая и параболическая гомологии во второй модели 179
а) Гиперболическая гомология 179
б) Параболическая гомология 180
п. 4. Частные случаи гиперболической и параболической гомологии (первая модель) 181
п. 5. Инволюционное преобразование проективной плоскости 183
§ 39. Проективное преобразование в координатах . . . 185
п. 1. Основная теорема 185
п. 2. Неподвижные точки проективного преобразования 187
п. 3. Гомологические преобразования в координатах . 189
§ 40. Линии второго порядка на проективной плоскости . 190
п. 1. Линии второго порядка в первой модели . . . 190
п. 2. Линии второго порядка во второй модели . . . 192
п. 3. Проективная классификация линий второго порядка 193
п. 4. Внутренние и внешние точки овальной линии второго порядка 194
§ 41. Проективные преобразования пространства . . . 194
п. 1. Проективное пространство 194
п. 2. Принцип двойственности 197
п. 3. Однородные координаты 199
п. 4. Проективные преобразования пространства . . 200
п. 5. Проективные преобразования в координатах . . 201
п. 6. Поверхности второго порядка 201
Дополнение к главе V.
Топология проективной плоскости 202

Глава VI. Инверсия 218
§ 42. Степень точки относительно окружности . . . 218
§ 43. Определение инверсии 219
§ 44. Свойства инверсии 220
§ 45. Круговые преобразования. Основная теорема . . 223

Петр Сергеевич Моденов
и Алексей Серапионович Пархоменко

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Редактор В. С. Капустина
Художник Г. Федоров
Худ. ред. Ю. Канцебовский
Технический редактор М. С. Ермаков

Сдано в набор 5.IV 1961 г.
Подписано к печати 30.IX 1961 г.
Л-74369. Формат 60×90/16. Печ. л. 14,5.
Уч.-изд. л. 12,38.
Изд. № 1601. Заказ 75. Тираж 25 000.
Цена 1 руб.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры

П. С. МОДЕНОВ
А. С. ПАРХОМЕНКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ